

С. В. ФОМИН

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

(издание второе, дополнение)

И. М. Яглом

НЕОБЫКНОВЕННАЯ АЛГЕБРА

С. В. Фомина «Тооллын систем» И. М. Яглом «Ер бусын алгебр» хэмээх ЗХУ-д «Популярные лекции по математике» цувраалаар гарсан хоёр лекц оруулав.

«Тооллын системд» аравтын, хоёртын ба бусад тооллын янз бүрийн системийн чанар, хэрэглэгээ болон тэдгээрийн үүссэн түүхийн тухай өгүүлнэ. Тооллын хоёртын системтэй холбогдуулж тооцон бодох машины тухай анхны мэдэгдхүүн олгоно.

«Ер бусын алгебрт» математик логик ба электрон тооцооны машин кибернетиктэй холбогдсон орчин үеийн математикийн бүх чиглэлүүдэд чухал үүрэгтэй «Булийн алгебр» хэмээх сургаалд холбогдох үндсэн ойлголтуудыг өгүүлнэ.

Энэ номыг уншиж ойлгоход уншигчдаас бүрэн бус дунд сургуулийн хүрээнээс гарахгүй математикийн тийм мэдлэг л шаардана.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

ТООЛЛЫН СИСТЕМ

Өмнөх үг

Тооны хэл, жирийн хэлний адилаар өөрийн цагаан толгойн үсгүүдтэй юм. Одоо бараг дэлхий даяар ашиглаж байгаа тооны хэлний цагаан толгойн үсгүүд нь 0-гоос 9 хүртэлх арван цифр (тэмдэг) юм. Энэ хэлийг тооллын аравтын систем гэж нэрлэдэг. Газар бүрийн хүмүүс цаг ямагт л тооллын аравтын систем ашиглаж байсан уу гэвэл үгүй юмаа.

Цэвэр математикийн талаас нь авч үзвэл аравтын тооллын системийг бусад, боломжит тооллын системүүдээс ялгах онцгой аянуу тал байхгүй юм. Энэ системийн газар сайгүй тархсан нь математикийн ерөнхий хуулинд байгаа биш, огт өөр шалтгаантай юм. Орчин үеийн тооцон бодох машин, эрхэмлэн ашигладаг хоёртын ба (заримдаа) гуравт системүүд нь сүүлийн үед аравтын системийн зүй ёсны өрсөлдөгч нь болсон юм.

Янз бүрийн тооллын системийн чанар, үүссэн түүх болон тэдгээрийг хэрэглэх талаар энэ өчүүхэн номонд өгүүлжээ. Номыг уншихад дунд сургуулийн программын хүрээнээс гарсан математикийн мэдлэг шаардахгүйг тэмдэглэе.

1 §. Бүтэн аравт ба бүтэн биш аравтын тоонуудын тухай

"Байшингаас 49 эргэм насны хүн гарч гудамжаар 196 метр яваад дэлгүүрт орж тэндээс хоёр долоон өндөг худалдан авч цааш явав" гэсэн өгүүлбэрийг авч үзье,

Ингэж ярих нь гайхалтай санагдах биз дээ? Хүний нас, зай гэх мэтийн ямар нэгэн хэмжигдхүүнийг бид өнрөлцөөгөөр үнэлэхдээ дандаа "200 метр" "50 эргэм насны хүн" гэх мэтээр ихэвчлэн бүтэн аравтын тоонуудыг ашиглаж ярьдаг юм. Бүтэн биш аравтын тоонуудыг бодвол бүтэн аравтын тоонууд дээр арифметикийн үйлдэл хийхэд тохиромжтой ба мөнгөтэдгээрийг тогтооход хялбар байдаг. Жишээ нь 100 ба 200 тоог нээжээр хэн ч амархан үржих атал 147 ба 343 гэсэн гурван оронтой хоёр бүтэн биш аравтын тоог бичихгүй бол тэр болгон хүн түргэн үржиж чадахгүй.

Тоонуудыг бүтэн аравт ба бүтэн биш аравт гэж ангилах нь зөвхөн ярианы хэлний хүрээнд хийсэн тохиролцоо юм. Үнэндээ тооллын ямар систем ашигласнаас хамаарч тухайн тоо бүтэн аравт эсвэл бүтэн биш аравтын тоо болж болох юм.

Гэлээ ч гэсэн бүтэн аравт ба бүтэн биш аравтын тооны тухай ярихад бид үүнийг огт бодолгүй ярьж заншжээ. Үүний учрыг олохын тулд юуны өмнө бид бүхний өдөр тутам ашигладаг ердийн аравтын тооллын систем нь юу болохыг авч үзье. Энэ системд аливаа эерэг бүхэл тоо нь нэгжүүд, аравгууд, зуутууд гэх мэт нэгжүүдийн нийлбэр байдалтай тавигддаг. Өөрөөр хэлбэл коэффициентүүд нь 0-ээс 9 хүр-

тэл утга авдаг 10-ын янз бүрийн зэргүүдийн нийлбэртэй хэлбэртэй тавигдана. Жишээ нь:

2548

гэсэн бичлэг нь авч үзэж байгаа тоо нь 8 нэгж, 4 аравт, 5 зуут, 2 мянгат агуулахыг заана. Өөрөөр хэлбэл 2548 тоо

$$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$$

илэрхийдлийн хураангуй тэмдэглэл нь юм.

Ямар ч тоог 10-аас өөр ямар нэгэн бүхэл тоонд (1-ээс бусад) тухайлбал 7-гийн зэргүүдийн эвлүүлэг хэлбэртэйгээр дээрхийн адил бичиж болно.

Тооллын долоотын систем "буюу" 7 суурьтай тооллын систем" гэж нэрлэгдэх энэ системд бид 0-оос 6 хүртэл ердийн маягаар тоолох ба харин 7-ын тоог дараачийн орны нэгж болгож болно. Түүнийг бид шиг нэ долоотын системд

10

гэсэн тэмдгээр тэмдэглэх нь зүйтэй (хоёрдугаар орны нэгж) Энэ тэмдэглэгээг аравтын системийн тоо 10-тай андуурахгүйн тулд түүнд 7 гэсэн тэмдгийг хавсаргая.

Өөрөөр хэлбэл 7-гийн оронд

$$(10)_7$$

гэж бичиж байя!

Дараачийн орнуудын нэгжүүд нь 7^2 , 7^3 гэх мэтийн тоонууд байх ёстой ба тэдгээрийг

$$(100)_7, (1000)_7$$

гэх мэтээр тэмдэглэх нь зүйтэй. Ямар ч бүхэл тоог 7-ийн зэргүүдээс эвлүүлж болно. Өөрөөр хэлбэл

$$a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0$$

хэлбэрт тавьж болох ба үүнд a_0, a_1, \dots, a_k коэффициентүүд нь 0-оос 6 хүртэлх аливаа утгыг авч болно. Тоог 7 суурьтай системд бичсэн бичлэгт арав-

тын системийн адилаар энэ суурийн зэргүүдийг орхиж, бидний ашиглаж байгаа тооллын системийн суурь нь чухамхүү тоо 7 мөн гэдгийг 7 тэмдгээр сануулан

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_7$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Жишээ авч үзье. Аравтын тоо 2548-ийг

$$1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 0$$

хэлбэрт оруулж болох ба бидний дээрх тэмдэглэлгээ өөрөөр

$$(10300)_7$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Иймд

$$(2548)_{10} = (10300)_7$$

Ирмэгийн энэ "долоотын системд аравтын системийн бүтэн аравт байсан тоонууд бүтэн долоот байх нь албагүйг сануулъя.

Жишээ нь:

$$\begin{aligned} (147)_{10} &= (300)_7 \\ (343)_{10} &= (1000)_7 \end{aligned}$$

Учир нь

$$\begin{aligned} 147 &= 3 \cdot 7^2 \text{ ба } 343 = 7^3 \text{ гэгээл} \\ (100)_{10} &= (202)_7 \\ (500)_{10} &= (1313)_7 \end{aligned}$$

гэх мэт. Ийм учраас, долоотын системд $(147)_{10}$ -г $(343)_{10}$ -аар үржих нь $(100)_{10}$ -г $(500)_{10}$ -аар үржсэнээс хялбар байна. Хэрэв бид долоотын системийг ашигласан бол 49 насыг (50 нас биш) бүтэн наст"-д тооцож ой тэмдэглэж зайг барагцаагаар хэмжиж "98 м" эсвэл "196 м" гэж ярьж, $(98)_{10} = (200)_7$ ба $(196)_{10} = (400)_7$ нь 7-тын системд бүтэн аравтын тоонууд болно) юмыг арав арваар биш долоо долоогоор тоолох байсан юм.

Товчоор хэлбэл, хэрвээ долоотын систем бүх нийтэд тархсан байсан бол эхэнд дурьдсан өгүүлбэрт хэн ч гайхахгүй байхсан билээ.

Гэвч үнэн хэрэг дээрээ долоотын систем нь түгээмэл тархаагүй ба хаяагүй тархсан аравтын системтэй өрсөлдөж чадаагүй юм. Үүний шалтгаан нь юунд орших вэ?

2 §. Тооллын аравтын системийн үүсэл

Яагаад чухамхүү 10-ын тоо тийм онцгой үүрэгтэй байна вэ? Эдгээр асуудлаас хол хүн бол эрэгцүүдэд бодолгүйгээр тоо 10 нь бүтэн аравт юм. Ямар ч тоог түүгээр үржихэд хялбар мөн аравтууд, зуутуудаар тоолох нь хялбар эвтэй юм гэсэн хариултыг өгч магадгүй. Гэвч хэргийн учир яг үүний урвуу бологых бид тайлбарласан билээ. 10-ыг тооллын системийн суурь болгож авсан учраас тэр нь бүтэн аравт байгаа юм, тооллын ямар нэгэн системд тухайлбал долоотын системд шилжихэд (энэ системд 10 тоо (13); байдалтай бичигдэнэ) түүний бүтэн аравт болох чанар нь дауу үгүй болно.

Чухам аравтын систем нийтэд түгсэн шалтгаан нь математикт огт хамаагүй өөр шинж чанартай юм. Эрт дээр үеэс эхлэн хүмүүсийн тоололд ашигласан анхны хэрэгсэл болох гарын арван хуруу л үүний шалтгаан болно. Нэгээс арав хүртэл хуруугаар тоолоход тохиромжтой байдаг. Бидэнд байгалиас заяасан «тооцооны хэрэгслийн» бүх бололцоог шавхаж 10 хүртэл тоолоод энэ 10 гэсэн тоог шинэ томоохон нэгж болгож авах нь зохимжтой юм. (Дараачийн оронгийн нэгж). Арван аравтыг гуравдугаар орны нэгж болгон авах гэх мэтээр. Ийм учраас чухам хуруугаар тоолох нь одоо бидэнд яагаад ч юм, чухам тийм байх ёстой мэт санагдах болсон, аравтын системийн эхлэлийг тавьсан байна.

3 §. Тооллын бусад систем ба тэдгээрийн үүсэл

Тооллын аравтын систем нь одоогийн ноёлох байр сууриа тийм ч амархан эзлээгүй байна. Түүхэн өөр өөр үед олон ард түмэн аравтынхаас ялгаатай тооллын системийг ашиглаж байсан байна.

Жишээлбэл арван хоёртын тооллын систем нь нэлээд өргөн тархмал байжээ. Үүний гарал нь мөн л хуруугаар тоолохтой холбоотой нь эргэлзээгүй. Тодруулбал эрхий хуруунаас бусад гарын дөрвөн хуруу нь нийтдээ 12 үетэй (1 дүгээр зураг) тул эрхий хуруугаараа тэлгээрийг дэс дараалан 1-ээс 12 хүртэл тоолж болно.

Дараа нь 12-ийг дараачийн орны нэгж болгож авна. Арван хоёртын системийн ул мөр эдүгээ хүртэл аман ярианд хадгалагдаж үлджээ. Жишээ нь бид «арван хоёр»

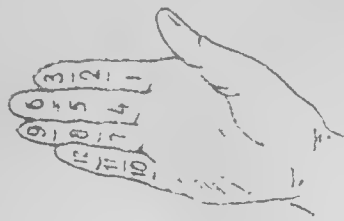
гэхийн оронд «дюжин» 1 гэж орос хэлэнд ихэвчлэн ирьдаг юм. Хутга, сэрээ, таваг гэх мэтийн олон үүлнийг бид аравтаар биш ихэвчлэн 12-аар (дюжинаар) тоолдог. (хоолны бүрэн иж хэрэгсэл голдуу 12 эсвэл 6 хүнд хааяа 10 ба 5 хүнд зориулагдсан байдлыг санацгаа). «Дюжины дюжинийг» заасан «гросс» гэдэг үг одоо маш ховор тохиолдох болжээ (Өөрөөр хэлбэл арван хоёртын систем дэхь гуравдугаар орны нэгж). Бас нэлээд хэдэн арван жилийн өмнө энэ үг ялангуяа худалдаанд үлэмж их тархсан байв. «Арван хоёр гроссыг» «масс» гэж нэрлэдэг байсан ба одоо үүнийг мэдэх хүн ховор болжээ.

Англичуудын хэмжүүрийн системд $(1 \text{ фут} = 12 \text{ дюйм})$ ба мөнгөний системд $1 \text{ шиллинг} = 12 \text{ пенс}$ байдаг нь тооллын арван хоёртын системийн ул мөр болох нь эргэлзээгүй.

Математикийн үүднээс авч үзвэл арван хоёртын систем нь аравтын системийг бодвол ямар нэг талааран давуу юм.

Учир нь 12-ын тоо 2, 3, 4, 6-д хуваагдах ба 10 нь зөвхөн 2 ба 5-д хуваагдана. Тооллын системийн суурь нь олон хуваагчтай бол түүнийг ашиглахад тохиромжтой байдаг. Хуваагдах шинжтэй холбогдуулж 7 §-д бич энэ асуудлыг эргэж авч үзнэ.

1/Дюжин - 12 юмнаас тогтсон зүйлийг голдуу ярьдаг ба багц 12 гэж орчуулдаг. (редакторын тайлбар)



1 дүгээр зураг.

Өндөр соёлтой, тухайлбал математикийн соёл нэлээд өндөр байсан, эртний Вавилонд нэлээд нарийн, жартын¹ систем байсан. Тэр систем чухам яаж үүссэнийг тайлбарлахад түүхчдийн санал зөрж байна. Нэг нь зургаатын нөгөө нь аравтын системийг ашигладаг хоёр омог нэгдэж нэг омог үүссэн гэсэн яг үнэн болох нь лавтай биш нэг ийм таамаглал байдаг. Энэ хоёр омог ашиглах системийнхээ талаар харилцан буулт хийж тохиролцсоноос жартын систем үүссэн гэж үздэг. Вавилончууд жилд 360 хоногтой гэж тоолдог байсантай холбогдож 60-тын систем үүссэн гэдэг бас нэг таамаглал байдаг. Гэвч энэ таамаглалыг бодитой үндэслэгдсэн гэж үзэж бас л болохгүй юм. Учир нь: Эртний Вавилончуудын одон орны мэдлэг нэлээд сайн байсан болохоор жилийн уртыг тодорхойлохдоо тэдний гаргасан алдаа нь 5 хоногоос нэлээд бага байсан гэж бодох ёстой. Жартын системийг үүсгэл нь тодорхой бус хэвээр байгаа ч гэсэн түүнийг Вавилон улст хэрэглэж байсан ба өргөн тархсан гэдгийг гүйцэд сайн тогтоосон юм. Арван хоёртын системийн адил энэ систем нь ямар нэгэн хэмжээгээр одоо ч гэсэн хадгалагдан үлджээ. (Жишээ нь цагийг 60 минутад, минутыг 60 секундэнд, өнцгийг хэмжих системд мөн үүнтэй адилаар градус = 60 минут, 1 минут = 60 секунд байдаг.) Жаран өөр "цифр"-ийг хэрэглэх энэ систем нь нийтдөө нэлээд нүсэр, аравтын системийг бодвол тохиромж багатай юм.

Африкийн нэрт шинжээч Стенлийн мэдүүлгээр бол африкийн зарим омогт тавтын систем тархсан байна. Энэ систем анхны "тооцооны машин" болох хүний гарын зохион байгуулалттай холбоотой нь илэрхий юм.

Олон зуун жилийн турш америк тивийн өргөн уудам нутагт оршин сууж тэнд өндөр соёлыг буй болгосон бөгөөд дараа нь 16—17 зуунд испанийн булаан эзлэгчдэд бараг бүрэн устгагдсан ацтек, майя омогууд хорьтын системийг хэрэглэдэг байв. Манай тооллыг хүртэлх хоёр мянгаад оноос эхлэн Баруун Европод оршин сууж байсан кельтуудын омог мөн хорьтын системийг хэрэглэдэг байв. Кельтуудын хорьтын системийн зарим нэгж ул мөр нь орчин үеийн франц

¹Манай оронд 60-тын систем хэрэглэж байжээ, 60 оронтой тооны нэр байсан ба он тооллыг 12, 60-аар тоолдог байжээ. (хэв. ред)

хэлэнд хадгалагдаа үлджээ. Жишээ нь францаар "ная" *quote-vingt* гэдэг ба энэ нь үгчилбээс "Дөрвөн хорь" гэсэн үг юм. Мөн францын мөнгөний системд "и" тааралддаг. Мөнгөний үлдсэн нэгж франк нь 20 сууд хуваагдана.

Хүн төрөлхтөний соёлын хөгжилд аравтын системийн хамт мэдэгдэхүйц үүргийг гүйцэтгэсэн тооллын дээр дурдсан дөрвөн системийн дотроос (арван хоёртын, тавтын, жартын, хорьтын) үүсэл нь тодорхойгүй байгаа жартын системээс бусад нь гарын эсвэл гар ба хөлийн хуруугаар тоолох аргатай холбоотой байна. Өөрөөр хэлбэл аравтын системийн адил "анатомийн" үүсэлтэй нь эргэлзээгүй.

Дээр дурдсан жишээнүүдээс харвал (тэдгээрийн тоог нилээд олшруулж болох байв.) тооллын эдгээр системүүдийн олон тооны ул мөр нь янз бүрийн хэл, мөнгөний систем, хэмжүүрийн системд бидний үеийг хүртэл хадгалагдан ирсэн нь харагдаж байна. Гэвч онд тоог бичих ба янз бүрийн тооцоог гүйцэтгэхэд аравтын системийг дандаа ашигладаг заншилтай болжээ.

4 §. Тооллын оронт ба оронгүй системүүд

Дээр бидний ярилцсан тооллын бүх системүүдийг нэг ерөнхий зарчмаар байгуулдаг. Тооллын системийг суурь гэж нэрлэгдэх ямар нэгэн p тоог сонгож аваад ямар ч N тоог, 0-гоос $p-1$ хүртэл утга авч болох коэффициентуудтайгаар p тооны зэргүүдийн эвлүүлэг байдалтай бичдэг. Өөрөөр хэлбэл

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

хэлбэртэй бичдэг. Энэ тоог хураангуйгаар

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_p$$

хэлбэртэй бичдэг. Энэ бичлэгийн цифр бүрийн утга нь түүний байгаа байрнаас хамаарна. Жишээ нь 222 гэсэн тоонд 2 гурван удаа орсон байна. Тэдгээрийн хэлмгийн баруун нь хоёр нэгжийг, баруунаас хоёрдох нь хоёр аравтыг (өөрөөр хэлбэл хорийг) гуравдахь нь хоёр зуутыг заана. (Бид энд аравтын системийг авч

үзэв). Хэрэв бид 222-ыг тухайлбал p суурьтай тооллын өөр системд бичсэн бол эдгээр хоёрууд харгалзан $2, 2p, 2p^2$ утгуудыг заах байсан. Ийм аргаар байгуулсан тооллын системийг *оронт тооллын систем* гэнэ.

Өөр зарчмаар байгуулсан оронгүй бусад тооллын систем байдаг. Тийм систем хэн бүхний мэдэх, жишээ нь римийн цифрүүд юм. Энэ системд I-пэгж, V-тав, X-арав, L-тавь, C-зуу гэх мэтийн үндсэн тэмдгүүд байх ба ямарч тоог эдгээр тэмдгүүдийн эвлүүлэг байдалтай бичнэ. Жишээ нь тоо 88 тоог энэ системд дараахь байдалтай бичнэ.

LXXXVIII

Энэ системд тэмдэг бүрийн утга нь өөрийн байгаа байрнаас хамаарахгүй. Тоо 88-ын дээрх бичлэгт X цифр нь гурван удаа орохдоо бүгд ижил хэмжигдхүүн арван нэгжийг л заана.

Римийн цифр нь одоо ч гэсэн байнга хэрэглэгддэг боловч (Жишээ нь цагны нүүрэн дээр) түүнийг математикийн практикт хэрэглэдэггүй. Их тоог харьцангуйгаар цөөн тооны цифрээр бичиж болдог тул оронг систем нь тохиромжтой байдаг. Оронг системд бичсэн тоонуудад арифметикийн үйлдлүүд гүйцэтгэхэд хялбар энгийн байдаг нь энэ системийн бусад системээс илүү давуу бас нэг чухал тал нь юм. (Энэ хэлснийг харьцуулахын тулд жишээ нь римийн цифрээр бичсэн хоёр гурван оронтой тоог үржихийг оролд).

Бид цаашдаа зөвхөн тооллын оронг системүүдийн тухай ярих болно.

5 §. Тооллын янз бүрийн систем дэх арифметик үйлдлүүд

Бид аравтын системд бичсэн тоонуудын хувьд "баганаар" нэмэх ба үржих "өнгөглөн" хуваах дүрмийг ашигладаг. Бусад ямарч оронг системд бичигдсэн тоонуудын хувьд эдгээр дүрмүүдийг бүрэн хэрэглэдэг.

Нэмэхийг авч үзье. Аравтын системийн адилмаар өөр ямарч системд бид эхлээд нэгжүүдийг нэмж дараа нь дараагийн оронд шилжиж хамгийн их орон хүр-

тэй үржүүлж үлддэг. Өмнөх орныг нэмэх үед нийлбэр энэ бичлэг бичигдсэн тооллын системийн суурьтай тооцүү буюу сууриас их байвал дараагийн оронд шилжүүлэх ёстой гэдгийг тухай бүр заавал санаж байх ёрлогтой. Жишээ нь,

$$\begin{array}{r} 1) + (23651)_8 \\ \quad (17043)_8 \\ \hline \quad (42714)_8 \\ 2) \quad (423)_6 \\ \quad (1341)_6 \\ \hline \quad (521)_6 \\ \quad (3125)_6 \end{array}$$

Одоо үржүүлэхэд шилжье. Тодорхой болгохын тулд ямар нэгэн тодорхой системийг тухайлбал зуршны системийг сонгож авъя. Аливаа тоонуудыг өөр хооронд нь үржүүлэхийн үндэс нь тооллын системийн сууриас бага тоонуудын үржвэрийг тодорхойлсон үржүүлэхийн хүрд байдаг. Зургаатын системийн хувьд үржүүлэхийн хүрд дараахь байдалтай байдгийг хялбархан шалгаж болно.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Энэ хүрдийн нүд бүрд тэр нүдний оршиж байгаа мөр ба баганын дугааруудын үржвэр болох тоог зургаатын системд бичсэн болно (Энд таблицын нүсэр болгохоос зайлсхийж 6 тэмдгийг бид орхив).

Энэ хүрд ашиглаж хэдэн ч оронтой тоонуудыг "баганаар" хялбархан үржиж болно.
Жишээ нь

$$\times \frac{(353)_6}{(245)_6} \frac{(3124)_6}{(2332)_6} \frac{(1144)_6}{(145244)_6}$$

Тооллын ямарч системд мөн өнцөглөн хувааж болно. Жишээ нь $(120101)_3$ -ийг $(102)_3$ -д хуваа гэсэн бодлогыг авч үзье.

Үүний бодолт нь:

$$\frac{(120101)_3}{(102)_3} \Big| \frac{(102)_3}{(111)_3} \frac{(1101)_3}{(102)_3} \frac{(201)_3}{(102)_3} \frac{(22)_3}{(22)_3}$$

хуваагдагч, хуваагч, ноогдвор үлдэгдлийг аравтын системд бичиж хариу зөв болохыг шалга).

Бодлого 1. Самбар дээр дараахь дутуу арцсан бичлэг үлдсэн бол нэмэгдхүүнүүд ба нийлбэр тооллын ямар системд бичигдсэнийг тодорхойл.

$$+ \frac{23-5}{1-642} \frac{42}{42 \cdot 42 \cdot 3}$$

Хариу: Долоотын системд

Бодлого 2. Танай анги хэдэн сурагчидтай вэ? гэсэн бидний асуултад багш "Манай анги 100 сурагчидтай үүнээс 24 нь хөвгүүд 32 нь охидууд болно" гэж хариулсан хариултанд бид эхлээд гайхсан боловч дараа нь багш зөвхөн аравтын бус систем ашигласныг ойлгов. Багш ямар системийг ашигласан бэ?

Энэ бодлогыг бодоход хэцүү биш. Ярьж буй тэр тооллын системийн суурь нь x байг. Тэгвэл багшийн хариулт нь түүний анги x^2 сурагчидтай ба тэднээс 24-и хөнгүүд, $3x+2$ охид гэсэн үг болно.

$$2x+4+3x+2=x^2$$

$$x^2-5x-6=0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

өөрөөр хэлбэл $x_1=6$, $x_2=-1$ болно.

1 нь тооллын системийн суурь байж болохгүй тул $x=6$ болно. Ингэхлээр багш хариугаа зургаатын системд хэлсэн байна. Үүнд түүний анги гучин зургаан сурагчидтай ба тэдгээрийн арван зургаа нь хөвгүүд, хөрө нь охид байсан байх нээ.

6 §. Тоог нэг системээс өөр системд шилжүүлэх

11-г системд тухайлбал аравтын системд бичигдсэн тоог өөр ямар нэгэн, жишээлбэл долоотын системд шилжүүлэх вэ? Ямар нэгэн A тоог долоотын системд бичнэ гэдэг нь түүнийг

$$A = a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0$$

хэлбэртэй бичнэ гэсэн үг гэдгийг бид мэднэ. Ийм учраас A тооны долоотын бичлэгийг олохын тулд аль нь ч 0-оос 6 хүртэлх цифрууд байж болох a_0, a_1, \dots, a_k коэффициентуудыг олох хэрэгтэй. A тоог 7-д (бүхэл тоонуудад) хуваая. A тооны дээр бичигдсэн бичлэгийг сүүлчийнхээс бусад бүх нэмэгдхүүнүүд нь 7-д бүхлээр хуваагдах тул үлдэгдэл нь a_0 гарах нь илэрхий. A тоог 7-д хуваахад ноогдсон ноогдворыг авч түүнийг бас 7-д хуваая. Ингэхэд гарсан шинэ үлдэгдэл нь a_1 -тэй тэнцүү байна. Энэ үйлдлийг цааш нь үргэлжлүүлж A тооны долоотын бичиглэлд орох бүх a_0, a_1, \dots, a_k цифрууд дээрхийн адилаар ноогдворуудыг

7-д дараалан хуваахад гарсан дараалсан үлдэгдлүүд болно.

Жишээ нь:

$$(3287)_{10}$$

тоог авч үзье. Түүнийг 7-д хуваахад ноогдвор нь 469 үлдэгдэл нь 4 байна.

Ингэхлээр 3287 тооны долоотын бичлэгийг сүүлчийн цифр нь 4 байна. Хоёрдугаар буюу аравтын орны цифрийг олохын тулд олсон ноогдвор 469-ийгээ бас 7-д хуваая. Ингэхэд ноогдвор нь 67 ба үлдэгдэл нь тэгтэй тэнцүү байна. Иймд 3287 тооны долоотын дүрслэлд хоёрдугаар цифр нь тэг байна. Цааш нь 67-г 7-д хуваахад ноогдвор 9, үлдэгдэл нь 4 байна. Энэ үлдэгдэл 4 нь 3287 тооны долоотын бичлэгийн гаравдахь буюу зуутын орны цифр болно. Эцэст нь сүүлчийн ноогдвор 9-ийг 7-д хувааж ноогдвор нь 1, үлдэгдэл нь 2 болохыг олно. Бидний хайж байгаа бичлэгийн дөрөв дэхь орны цифр нь энэ үлдэгдэл 2 болох ба ноогдвор 1 нь (Одоо бид түүнийг 7-д хувааж чадахгүй) сүүлчийн тав дахь орны цифр болно. Ийм учраас

$$(3287)_{10} = (12404)_7$$

Энэ тэнцэтгэлийн баруун тал нь

$$1 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 4$$

илэрхийллийн хураангуй бичлэг болно.

Тоо 3287-ийн бичлэгээс түүний дүрслэлд шилжихэд хийсэн гаргалгааг дараахь байдалтай байрлуулахад тохиромжтой байдаг.

$$\begin{array}{r} 3287 \overline{) 7} \\ 4 \ 469 \overline{) 7} \\ \underline{0} \quad 67 \overline{) 7} \\ \underline{4} \quad 9 \overline{) 7} \\ \underline{2} \quad 1 \end{array}$$

Дээр дурдсан бүх зүйлүүд зөвхөн долоотын системээр барахгүй өөр ямар ч системд хэрэглэж болох нь ойлгомжтой. Ямар нэгэн A тооны p суурьтай сис-

темд p -д бичлэгийг олох ерөнхий дүрмийг дараахь байдлаар томъёолж болно:

Тооны p -д бүхлээр хуваахад гарах үлдэгдэл нь A байхад p -д бичлэгийн нэгжийн орны буюу сүүлчийн цифр болно. Анх хуваахад ноогдсон ноогдворыг дахин p -д хувааж хоёрдугаар үлдэгдлийг авбал энэ нь хоёр-дугаар орны цифр болно гэх мэтчилэн тооллын системд суурь p -ээс бага ноогдвор гартал нь энэ үлдэгдэл үргэлжлүүлэх ба эцсийн ноогдвор нь ахмад орны цифр болно.

Бас нэг жишээ авч үзье. 100-г хоёртын системд бичлэг үзүүлье:

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 2} \\ 0 \ 50 \overline{) 2} \\ \underline{0} \quad 25 \overline{) 2} \\ \underline{1} \quad 12 \overline{) 2} \\ \underline{0} \quad 6 \overline{) 2} \\ \underline{0} \quad 3 \overline{) 2} \\ \underline{1} \quad 1 \end{array}$$

$$\text{Иймд } (100)_{10} = (1100100)_2$$

Тооны бодох машин ажиллах үед тоог аравтын системд нэгжээс хоёртын системд шилжүүлэх хэрэг байхад таааралдах юм. Тооцон бодох машины талаар хойно өнүүлнэ.

Бидний авч үзсэн жишээнүүдэд анхны тооллын систем нь аравтых байв. Мөнхгүйм аргаар тоог ямар ч системээс өөр аль ч системд шилжүүлж болно. Үүний тулд дээр авч үзсэн жишээнүүд, дээрхтэй адил мөн ийм дараалан хуваах үйлдлийг хийх ба гэхдээ эдгээр үйлдлүүдийг аравтын системд биш тооны анхны бичлэг өнцөгдсөн тэр системд хийх хэрэгтэй болно.

Бодлог 6. Бидэнд хоёр тавагтай жигнүүр ба 1 грамм, 3 грамм, 9 грамм, 27 грамм гэх мэт (жингүс бүрээс нэг ширхэг) туухайнууд байгаа бол эдгээрээр ямарч ачааг нэг граммын нарийвчлалтай хэмжиж чадах уу?

Энэ бодлогын хариу нь нааштай байна. Гуравтын системд тоо бичихэд тулгуурласан бодолгыг сийрүүлье. Бидний жигнэх ёстой биеийн жин нь A грамм байг (A тоог бид бүхэл гэж авч үзнэ). Энэ A тоог тооллын гуравтын системд

$$A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_3$$

гэж бичиж болно.

Өөрөөр хэлбэл $A = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0$ үүнд a_0, a_1, \dots, a_n коэффициентууд нь 0, 1, 2 утгуудыг авч болно. Ямар ч тоог бичлэгт нь 0; 1; -1 цифрүүд (0, 1, 2-ын оронд) орсон байхаар дээрхээс бага зэрэг ялгаатайгаар гуравтын системд бичиж болно. Тийм бичлэгийг дараахь маягаар гаргая. А тоог дээр дурдсан дараалан хуваах аргаар аравтын системээс гуравтын системд шилжүүлэх багэхдээ үлдэгдэл нь 2 гарах тухай бүр бид ноогдворыг нэгээр ихэсгэж үлдэгдлийг нь -1 гэж бичнэ. Үүний дүнд А тооны бичлэг нь дараахь нийлбэр хэлбэртэй болно.

$$A = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 3 + b_0$$

Үүнд b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 коэффициент бүр нь 0, 1, -1 утгуудыг авч болно.

Жишээ нь 100 тоог ердийн аргаар гуравтын системд 10201 гэж бичих ба хоёрдугаар аргаар бичвэл $100 = 3^4 + 3^3 - 3^2 + 1$ учраас 11—101 хэлбэртэй байх болно.

А грамм ачааг жигнүүрийн нэгдүгээр таваг дээр тавьж хэрэв $b_0 = 1$ бол 1 грамм туухайг хоёрдугаар таваг дээр, $b_0 = -1$ бол, нэгдүгээр таваг дээр тавья. (Хэрэв $b_0 = 0$ бол бид нэгдүгээр туухайг ажиглахгүй). Цааш нь 3 граммын туухайг хэрэв $b_1 = 1$ бол хоёрдугаар таваг дээр хэрэв $b_1 = -1$ бол нэгдүгээр таваг дээр тавих гэх мэтчилэн тэнцүүлъя. Ийм аргаар туухайнуудыг хуваарилахад бид А ачааг жигнэж чадна гэдгийг ойлгоход төвөггүй. Хэрэв ачааны жин нь үл мэдэгдэх байсан бол одоо ачаа тэнцэж байхаар туухайнуудыг жигнүүрүүд дээр бид байрлуулсны дүнд ачааны хэмжээг тодорхойлно.

Үүнийг жишээгээр тайлбарлая.

Бидэнд 200 грамм ачаа байна гэж авч үзье. 200-г ердийн аргаар гуравтын системд шилжүүлъя.

$$\begin{array}{r} 200 \mid 3 \\ \underline{2} \quad 66 \mid 3 \\ \quad 0 \quad 22 \mid 3 \\ \quad \quad 1 \quad 7 \mid 3 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

$$(200)_3 = (21102)_3 \text{ буюу дэлгэрэнгүй бичвэл } 200 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 \text{ болно.}$$

Энэ 200-г гуравтын бичлэгт дээр дурдсан хоёр-гоор аргаар 2-ыг ашиглахгүйгээр -1 -ийг ашиглан олон хуваагдахгүй.

$$\begin{array}{r} 200 \mid 3 \\ \underline{-1} \quad 67 \mid 3 \\ \quad 1 \quad 22 \mid 3 \\ \quad \quad 1 \quad 7 \mid 3 \\ \quad \quad \quad -1 \quad 2 \mid 3 \\ \quad \quad \quad \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

Энгийн ба өөрөөр бичвэл

$$200 = 1 \cdot 3^5 - 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^2 - 1 \text{ болно:}$$

Шууд бодох замаар сүүлчийн тэнцэтгэлийг хялбар-лан шалгаж болно.

Ийм учраас жигнүүр дээр тавьсан 200 грамм ачааг шилжүүлэхийн тулд мөн тэр тавган дээр 1 ба 81 граммын туухай тавих ба нөгөө таваг дээр 3, 9, 27, 243 граммуудын туухайнуудыг тавих хэрэгтэй юм.

7 §. Хуваагдах шинжийн тухай

Ямар нэгэн тоо нь 3, 5, 9 гэх мэт тоонуудад хуваагдах эсэхийг тодорхойлох хялбар шинжүүд байдаг. Эдгээр шинжүүдийг сануулъя.

1. Тооны 3-д хуваагдах шинж. Хэрэв тооны цифрүүдийнх нь нийлбэр 3-д хуваагдаж байвал тэрхүү тоо 3-д хуваагдана. Жишээ нь: тоо 257802 (цифрүүдийнх нь нийлбэр $2+5+7+8+0+2=24$) 3-д хуваагдах ба тоо 125831 цифрүүдийнх нь нийлбэр $1+2+5+8+3+1=20$ 3-д хуваагдахгүй.

2. Тоо 5-д хуваагдах шинж. Сүүлчийнх нэгжийн орны цифр нь 5 эсвэл 0 байвал тэр тоо 5-д хуваагдана. (Өөрөөр хэлбэл тооны сүүлчийн орны нэгж 5-д хуваагдаж байвал)

3. 2-д хуваагдах тооны шинж нь өмнөхтэй адил Сүүлчийн нэгжийн орны тоо нь 2-д хуваагдвал уг тоо 2-д хуваагдана.

4. 9-д хуваагдах тооны шинж нь 3-д хуваагдах шинжтэй адил. Цифрүүдийнх нь нийлбэр 9-д хуваагдана.

Эдгээр шинжүүдийн баталгаа нь хялбар болно. Жишээ нь: 3-д хуваагдах шинжийг авч үзье. Аравтын системийн орон бүрийн нэгжийг 3-д хуваахад үлдэгдэл нь 1 гардаг гэдэгт энэ шинж үндэслэгдсэн юм.

Иймд

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$$

Тоог өөрөөр хэлбэл

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ тоог} \\ (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) + B$$

хэлбэртэй бичиж болно. Үүнд B нь 3-д үлдэгдэлгүй хуваагдана. Эндээс

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

3-д хуваагдах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь тоо

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

3-д хуваагдах чанар болох нь харагдаж байна. Тооллын системийн суурь 10 нь 5-д хуваагдах тул

нэгжийн орноос бусад бүх орныг 5-д хуваахад үлдэгдэл нь тэг байдаг гэдгээс 5-д хуваагдах шинж гарна. Мөн үүн дээр 2-д хуваагдах шинж тулгуурласан: тэгш цифрээр төгссөн тоо тэгш байна.

9-д хуваагдах шинж нь мөн 3-д хуваагдах шинжийн адил 10 хэлбэрийн тоо бүрийг 9-д хуваахад үлдэгдэл нь 1 байдаг гэдгээс гарна.

Эдгээр бүх шинжүүд нь тооны чухам аравтын систем дэх дүрслэлтэй холбоотой ба хэрэв 10-аас ялгаатай, өөр ямар нэгэн тооллын системийг ашиглавал эдгээр шинжийг ерөнхийдээ хэрэглэж болохгүй гэдэг нь дээр ярьснаас тодорхой байна. Жишээ нь: 86 тоо нь наймтын системд $(126)_8$ хэлбэртэй бичигдэх ба (учир нь $86 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$) түүний цифрүүдийн нийлбэр нь 9 боловч 86 нь 0 ба 3-ийн алинд нь ч хуваагдахгүй.

Гэвч тооллын ямар ч оронт системийн хувьд түүний өөрийнх нь аль нэгэн тоонд хуваагдах шинжийг томьёолж болно. Хэдэн жишээ авч үзье.

20

Тоон арван хоёртын системд бичсэн бичлэгийн хувьд 10-д хуваагдах шинжийг томьёолъё. Тооллын системд суурь 12 нь 6-д хуваагдах тул арван хоёртын системд бичигдсэн тоо 6-д хуваагдах зайлшгүй ба хуваагдах нөхцөл нь хэрэв түүний сүүлчийн цифр 6-д хуваагдах явдал болно (Энд аравтын системд тооны 5, 3, 4 нь 12-ын хуваагчууд мөн учраас хуваагдах явдал нь шинжүүд үнэн байна. Арван хоёртын системд бичигдсэн тооны сүүлчийн орны цифр 2-д хуваагдвал аравтын 3 ба 4-д тэр тоо 2-д хуваагдана. (харгалзан үзье.) Арван хоёртын системийн хувьд хамааруулах явдал хуваагдах шинжүүдийг батлахыг уншигчдадаа үзье.

а) $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ тооны сүүлчийн хоёр орны цифрээр үүссэн тоо $(a_1 a_0)_{12}$ нь 8-д хуваагдаж байвал A нь өөрөө 8-д хуваагдана.

и) $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ тооны сүүлчийн хоёр орны цифрээр үүссэн тоо $(a_1 a_0)_{12}$ нь 9-д хуваагдаж байвал A нь 9-д хуваагдана.

1) Хэрэв A тооны цифрүүдийн нийлбэр $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ нь 11-д хуваагдаж байвал $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ тоо нь 11-д хуваагдана.

Тооны хуваагдахтай холбоотой бас хоёр бодлого үзье.

1. $A = (3630)_p$ тоо (p суурьтай системд бичигдсэн) 10-д хуваагддаг байг. Хэрэв $p \leq 12$ бол p нь хэдтэй тэнэх ба түүний аравтын бичлэг нь ямар байх вэ?

Хэрэв $p \leq 12$ нөхцөл биелэхгүй бол энэ бодлогын шийд нь ганц байж чадах уу?

Хариу: $p = 7$ $A = (1344)_{10}$ Хэрэв p хэмжигдхүүн заагчгүй бол шийд нь хязгааргүй олон байна. Чухамд p -ийн оронд $7k$ буюу $7k-1$ хэлбэрийн ямарч тоог авч болно. Үүнд $k=1, 2, \dots$

2. $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p$

хэлбэрийн өөрөөр хэлбэл

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

тоо $(p-1)$ -д хуваагдах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь:

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

нийлбэр $(p-1)$ -д хуваагдах явдал мөн гэдгийг батал. Аравтын системийн 9-д хуваагдах шинж, арван хоёртын системийн 11-д хуваагдах шинжтэй харьцуулна уу).

21

8 §. Хоёртын систем

Тооллын системийн суурь болгон авч болох тоонуудын хамгийн бага нь 2-ын тоо юм. Энэ суурьт харгалзах хоёртын систем гэж нэрлэгдэх тооллын систем нь маш эргний системүүдийн нэг юм.

Австрали ба Полинезийн зарим нэгэн омог нь үүнийг нэлээд бүдүүлэг байдлаар хэрэглэж байжээ. Энэ системийн тохиромжтой тал нь түүний ер бусын энгийн байдагт оршино. Хоёртын системд зөвхөн 0,1 цифрүүд оролцох ба 2 нь хоёрдугаар орны нэгж болно. Хоёртын системд бичигдсэн тоонуудын дээрх үйлдлүүдийн хүрд нь тун хялбар байдаг. Нэмэхийн үндсэн дүрэм нь дараах тэнцлүүдээр тодорхойлогдоно.

$$0+0=0; 0+1=1; 1+1=(10)_2$$

Хоёртын системийн хувьд үржихийн хүрд нь

	0	1
0	0	0
1	0	1

хэлбэртэй байна.

Хоёртын системийн нэг сул тал нь, суурь нь бага учраас бага тооны бичлэгт ч гэсэн олон тэмдэг ашиглах хэрэгтэй болдогт оршино. Жишээ нь: 1000 нь хоёртын системд арван цифрийн тусламжтайгаар бичигддэг.

1111101000

Техникийн янз бүрийн салбарт ялангуяа орчин үеийн тооцоон бодох машинд хоёртын системийн өргөн тархах шалтгаан болсон хэд хэдэн давуу чанараараа энэ сул талаа бараг анхаарахгүй болгодог юм. Хоёртын системийн техник хэрэглээний талаар бид хожим авч үзэх ба одоо тоог хоёртын системд бичихтэй холбогдсон хоёр бодлого авч үзье.

Бодлого 1. Би 1-ээс 1000 хүртэлх ямар нэгэн бүхэл тоо санах. Хэрэв асуулт болгонд би зөвхөн "тийм" эсвэл "үгүй" гэж хариулах бол надаас та 10-аас илүү тийм, үгүй асуулт асууж санасан тоог олж чадах уу? Амжилтанд гарцаагүй хүргэх боломжит цуврал асуултуудын нэг нь дараахь асуудал мөн.

1 дүгээр асуулт. Санасан тоогоо 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? Хэрэв тийм гэж хариулбал он цифрийг бичих ба "үгүй" гэвэл нэгийг бичнэ. (Өөрөөр хэлбэл бид санасан тоог 2-т хуваахад үлдсэн үлдэгдлийг бичнэ).

2 дугаар асуулт. Анх хуваахад ноогдсон ноогдворон 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? (Дахин тийм" гэж хариулбал тэгийг, "үгүй" гэж хариулбал нэгийг бичнэ).

Мөн энэ маягаар дараахь асуултуудыг асууна. Өөрөөр хэлбэл "Өмнөх хуваалтанд ноогдсон ноогдворыг 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? "тийм" гэж хариулах бүрд бид нэгийг бичих ба "үгүй" гэж хариулах бүрд тэгийг бичнэ.

Бид энэ үйлдлийг 10 удаа давтаж тэг буюу нэгээс бүрдсэн 10 цифртэй болно. Энэ цифрүүд нь олох тооны хоёртын систем дэх бичлэг мөн гэдэгт үнэмшихэд эцүү бишээ. Бидний асуултуудын систем нь үнэндээ ямар нэгэн тоог хоёртын системд шилжүүлэхэд хэрэглэдэг тэр үйлдлүүдийг давтаж байна. 1-ээс 1000 хүртэлх ямарч тоог хоёртын системд 10-аас илүүгүй тэмдгийн тусламжтайгаар бичиж болдог учраас арван асуулт асуухад хангалттай байна. Хэрэв санасан тоог хоёртын системд бичигдсэн байсан гэж санавал түүнийг олж болох асуултуудын систем нь маш амархан болно.

Энэ үед цифр бүрийн тэгтэй тэнцүү эсэхийг асуух өргөтгэй.

Өмнөхтэй агуулгаараа ойролцоо өөр бодлогыг авч үзье.

2 дугаар бодлого. Надад тус бүрд нь шатрын хөлийн адил 64 нүдтэй, эдгээрийн нүднүүдэд 1-ээс 127 хүртэлх янз бүрийн тоонуудыг бичсэн 7 хүснэгт байна гэж (хүснэгтийг үз).

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

1

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

3

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

5

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

7

1-ээс 7 хүртэл) над хэлбэл би энэ тоог ямар аргаар олох вэ?

1-ээс 127 хүртэлх тоог хоёртын системд бичье. Эдгээр тоонуудыг нэгдүгээр хоёртын системд долоогоос илүүгүй цифруудтай бичигдэнэ (Тухайлбал $127 = (111111)_2$). Хэрэв A нь хоёртын бичлэгийн k дугаар нэгжийн оронд ($k = 1, 2, \dots, 7$) нэг байвал түүнийг k дугаар хүснэгтэнд бичиж, k дугаар нэгжийн k дугаар нэгжийн оронд нэг байвал түүнийг тэнд бичихгүй. Жишээ нь: хоёртын бичлэг нь 0111001 байх тоо 57 нь нэг, дөрөв, тав, зургадугаар

0111001

хүснэгтэнд бичигдэх ба 1 нь зөвхөн нэгдүгээр хүснэгтэнд 1, нь бүх долоон хүснэгтэнд бичигдэнэ. Иймд та өгөгдсөн тоо аль аль хүснэгтэнд агуулагдаж байгааг хэлснээр түүний хоёртын бичлэгийг мэдээлэх ба үүнийг зөвхөн аравтын системд шилжүүлэх л үлдэнэ.

Асуултыг үүний урвуугаар тавьж болно. Над 1-ээс 127 хүртэлх ямар ч тоог хэлбэл би түүний аль аль хүснэгтэнд байх аль хүснэгтэнд байхгүйг хэлье. Энэ асуултны хариулахын тулд нэрлэсэн тоог хоёртын системд шилжүүлж (Бага зэрэг дадалтай бол үүнийг нээжээр тооцоход хялбархан) нэг байх тийм орнуудын дугааруудыг нэрлэх хэрэгтэй.

9 §. «Ним» гэдэг тоглоом

(Гурван хэсэг чүдэнзээр тоглох тоглоом)

«Ним» гэж нэрлэгдэх дараахь тоглоомоор бүр эртний хятадад тоглож байжээ. Гурван хэсэг чулуу байна. Энэ тоглоомд хоёр хүн тоглоно. Тоглогч бүр аль дургүй хэсгээс (гэхдээ зөвхөн нэгээс л) ээлжлэн (тэгээс дадалтай тооны) чулуу авна.

Дээрх таблиц бүрд тоонууд нь өсөх дараалалтай бичигдсэн учраас эдгээр хүснэгтүүдийн эсхеп байгуулалтыг нэрүүлэхэд хялбар байгаа. Гэвч хүснэгт бүрд тусг дурьд аргаар сэлгэж тавих зарим эдгээр хүснэгтүүдийн эсхеп байгуулалтыг нууцалж болно.

Сүүлдчийн чулууг авсан тоглогч хожно. Орчин үед чулуунуудын оронд жишээ нь чүдэнз мэтийн ойр дөхөм зүйлийг ашиглах ба энэ тоглоомыг «чүдэнзээр тоглох тоглоом» гэж нэрлэдэг.

Чулууг чүдэнзээр (эсвэл ямар ч өөр зүйлээр) сольсноос хэргийн гол өөрчлөгдөхгүй нь тодорхой.

Хоёр тоглогч оловчтой тактик баримталбал энэ тоглоомын төгсгөл ямар байхыг тайлбарлах ба энэ оновчтой тактик гэдэг нь юу гэсэн үг вэ? гэдгийг тайлбарлахад бодлогын учир оршино.

Энэ бодлогыг бодохын тулд хоёртын системийг ашиглавал тохиромжтой. Гурван хэсэг тус бүрд харгалзан a, b, c чүдэнзүүд байсан байг. a, b, c тоонуудыг хоёртын системд бичье.

$$\begin{aligned} a &= a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 \\ b &= b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + b_1 \cdot 2 + b_0 \\ c &= c_m \cdot 2^m + c_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0 \end{aligned}$$

Энд a, b, c тоонуудыг ижил оронтой гэж тооцож болно.

Учир нь Хэрэв цөөн оронтой тоо байвал тэрхүү тооны өмнө зохих тооны тэгийг бичиж оронг тэгшитгэж болно. Ийм учраас $a_0, b_0, c_0, \dots, a_m, b_m, c_m$ цифрүүд нь 0 буюу 1 байж болох ба a_m, b_m, c_m цифруудийн ядаж нэг нь (бүгдээрээ албагүй) тэгээс ялгаатай байна. Анхны нүүдлийг хийсэн (чулуу авсан) тоглогч a, b, c тоонуудын аль нэгийг дураар багасгаж чадна. Тэр нэгдүгээр хэсгээс чүдэнз авахаар шийдсэн гэж бодъё. Өөрөөр хэлбэл a тоог өөрчлөнө. Энэ нь a_0, a_1, \dots, a_m цифруудийн зарим нь өөрчлөгдөнө гэсэн үг. Үүнтэй адилаар тоглогч хоёрдугаар хэсгээс чүдэнз авбал b_0, b_1, \dots, b_m цифруудийн ядаж нэгийг өөрчлөх ба гуравдугаар хэсгээс чүдэнз авбал c_0, c_1, \dots, c_m цифруудийн ядаж нэгийг өөрчлөх болно.

Одоо дараахь нийлбэрүүдийг авч үзье.

$$a_m + b_m + c_m; a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1}, \dots, a_0 + b_0 + c_0 (*)$$

Эдгээр нийлбэр тус бүр нь 0, 1, 2, 3-ын аль нэгтэй нь тэнцүү байж болно. Хэрэв эдгээрийн ядаж нэг нь сондгой бол (өөрөөр хэлбэл 1 буюу 3-тай тэнцүү бол) анх нүүсэн тоглогч хожиж чадна. Үнэндээ (*) нийлбэрүүдийн (зүүнээс баруун тийш тоолоход) нэгдүгээр нийлбэр $a_k + b_k + c_k$ нь сондгой байг. Энэ үед a_k, b_k, c_k

Хэрэв тооны ядаж нэг нь 1-тэй тэнцүү байна. Жишээ нь a_{k-1} байг. Энэ нөхцөлд a_m, \dots, a_{k+1} коэффициентуудын хувиргахгүйгээр a_k нь тэгтэй тэнцүү ба a_{k-1}, \dots, a_0 коэффициент тус бүр нь нүүж байгаа тоглогчийн хувьд тооны тий утга 0 эсвэл 13 авсан байхаар тийм тооны чүдэнзийг тоглогч нэгдүгээр хэсгээс авч болно.

Ийм учраас бүх

$$a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}, \dots, a_0 + b_0 + c_0$$

нийлбэрүүд тэгш байхаар тийм тооны чүдэнзийг нэгдүгээр хэсгээс авч болно. Өөрөөр хэлбэл тоглоомыг эхлээд нь түүний нүүдлийн дараа бүх (*) нийлбэрүүд тэгш болсон байхаар нүүж чадна. Хоёрдугаар тоглогч яаж ч нүүлээ гэсэн эдгээр нийлбэрүүдийн ядаж нэгийг сондгой болгоно. Иймд түүний нүүдлийн дараа (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг нь сондгой болох тохиолдол бас гарна. Үүний дараа нэгдүгээр тоглогч дахин бүх (*) нийлбэрүүд тэгш байхаар нүүж чадна. Иймд нэгдүгээр тоглогчийн нүүдэл бүрийн дараа бүх (*) нийлбэрүүд тэгш болох ба хоёрдугаар тоглогчийн нүүдэл бүрийн дараа (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг нь сондгой болно. Нүүдэл бүрийн дараа чүдэнзийн тоо багасаж байгаа тул хэзээ нэгэн цагт бүх (*) нийлбэрүүд тэгтэй тэнцэнэ. Өөрөөр хэлбэл чүдэнз үлдэхгүй. Энэ үед бүх (*) нийлбэрүүд 0 тэгш тул нэгдүгээр тоглогчийн хэдэн нүүдлийн дараа бүх (*) нийлбэрүүд тэгтэй тэнцэж байна. Иймд тэр хожно. Хэрэв анхны байдал бүх (*) нийлбэрүүд тэгш байсан бол тоглоом эхлэгч яаж ч нүүсэн түүний нүүдлийн дараа (*) нийлбэрүүдээс ядаж нэг нь сондгой болох бөгөөд энэ үед хоёрдугаар тоглогч нэгдүгээр тоглогчийн дээр дурдсан тактик баримтлан тогловол хожиж чадна.

Иймд a, b, c тоонуудаар тоглоомын үр дүнг бүрэн үндэслэн тодорхойлж болно.

Хэрэв тэдгээрийн хувьд (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг сондгой бол нэгдүгээр тоглогч өөртөө хожил хангаж чадна. Хэрэв эдгээр бүх нийлбэрүүд нь тэгш бол хоёрдугаар тоглогч зөв тактик хэрэглэвэл хожно.

Хоёрдугаар тоглогчийн хувьд ашигтай тийм тооны хариалууд нэлээд ховор тохиолддог гэдгийг ухаарахад энүү биш болно. Ийм учраас a, b, c тоонууд нь сандгайрүй өгөгдөхөд хэрэв зөв тогловол нэгдүгээр тог-

логч бараг тогтмол хожно. Жишээ нь: Бид 10 чүдэнзтэй бол $(a+b+c=10)$ тэдгээрийг 9 аргаар гурван хэсэгт хувааж болох ба тэдгээрийн 8 нь нэгдүгээр тоглогчийн, зөвхөн 1 нь хоёрдугаар тоглогчийн хожлыг хангана.

10§. Цахилгаан мэдээн дэхь хоёртын код

Хоёртын системийг техникт анх хэрэглэж байсан дээр үеийн пэг жишээ нь цахилгаан мэдээний код юм. Үсгийн дэс дараагаар орос хэлний үсгүүдийг бичиж «ё» ба «й» оролцуулалгүй, үсгийн хоорондох зай «—»-г оруулан тэдгээрийг дэс дараалан дугаарлавал:

—	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	М	К	Л	М	Н	О	П	Р
,	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я		
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	

Үсэг бүрийн дугаарыг хоёртын системд бичье. $2^6=32$ тул эдгээр дугаар тус бүрийг таваас ихгүй тэмдгүүдээр дүрслэнэ. Шаардлагатай зохих тооны тэг анхны утгат цифрийн өмнө нэмж эдгээр дугаар тус бүрийн чухамхүү таван тэмдгээр л бичнэ. Иймд:

—	≈	0	0	0	0	0
А	≈	0	0	0	0	1
Б	≈	0	0	0	1	0
—	—	—	—	—	—	—
Я	≈	1	1	1	1	1

Ямар нэгэн холбооны хоёр газрыг холбосон таван дамжуулагч шугам байгаа гэж үзье.

Энэ үед цагаан толгойн үсгүүдийг тэмдэглэсэн таван оронтой тоо болгоныг тийм шугамаар цахилгаан импульсын тодорхой эвдүүлгээр дамжуулж болно. Жишээлэхэд: тэгэд импульс байхгүй нэгэд дамжуулагчид импульс байх үеийг харгалзуулна. Эдгээр импульсын энэхүү эвлүүлэг (5 тоо) нэгдэж хүлээн авах газрын цахилгаан аппаратын хөвлөх төхөөрөмжийг ажиллуулж энэ үндсэн дээр өгсөн импульсын тухайн эвдүүлэгд харгалзах үсэг туузан дээр хэвлэгдэнэ (Хоёртын тооллын тоонуудаар).

Цахилгаан мэдээний аппарат нь үндсэндээ хоёр төрөмжийн хослол юм. Үсгийг холбооны шугамаар нэгдэж болох импульс зохих систем болгон хувиргахад орнуулгдсан нэвтрүүлэх хэсэг ба импульсын өгсөн эвдүүлэг харгалзах үсгийг цахилгаан туузан дээр (эсвэл олонк дээр) хэвлэх хүлээн авах хэсгээс хоёр юм.¹ Цахилгаан мэдээнд чухамхүү хоёртын системийг хэрэглэн нь хоёртын систем дэхь тоог цахилгаан дохионы системд хувиргахад тохиромжтой байдагтай тооцоотой нь илэрхий².

11. § Хоёртын систем нь нууц хадгалагч мөн

Цахилгаан мэдээ буюу радио цахилгаан мэдээ дамжуулах хэрэгсэл телеграф буюу радио телеграф нь ямар нэгэн хаягаар мэдээ яаралтай дамжуулах сайн төрөгсөл юм. Гэвч тэр мэдээг өөр хүмүүс амархан барьж авч болох тул ихэнхдээ, ялангуяа дайны нөхцөлд мэдээ оруулалгдсан хүнээсээ бусад хүмүүст мэдээ нь ойлгомжгүй байхаар хийх нь зайлшгүй болдог. Энэ зорилгоор системийг нууцлах янз бүрийн арга хэрэглэдэг.

Учирч та нараас олон хүн үүнээс урьд нууцлах нь бүрийн арга бодож «нууцаар» харилцан захиа бичиж байсан байж магадгүй. Цагаан толгойн үсэг бүрийг ямар нэгэн тэмдгээр, өөр үсгээр, тоогоор болзолт тэмдгээр тэмдэглэх гэх мэт нь тийм аргуудын хялбархан нь бол. Гэмт хэргийн тухай ба адал явдлын уран зохиолд тийм системүүд байнга дурдагдаж байдаг. Наад зах нь Гошан-Дойлын «Бүжиглэгч бяцхан хүмүүс» эсвэл Жюль Верний «Дэлхийн төвд аялсан нь» гэдэг зохиолуудыг сана. Ямар ч тийм системийг тайлахад хэцүү биш юм.

¹ Бид холбооны хоёр цэгийг холбосон таван дамжуулагчийн тус ярьсан. Хэрэг дээрээ өгсөн үсэгт харгалзах тэр эвдүүлэг үүсгэж байгаа импульсуудыг нэг дамжуулагчаар дараалан дамжуулагч юм.

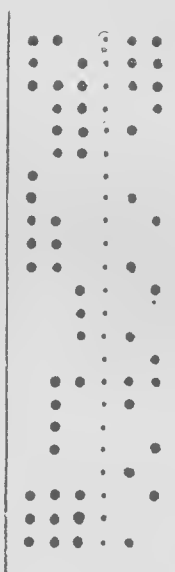
² Цахилгаан мэдээнд үсгийг дээр дурдсан таван тэг ба нэгээр тэмдэглэх системээс гадна Морзын цагаан толгой гэж нэрлэгдэх бар кодын системийг өргөн хэрэглэдэг. Морзын цагаан толгой нь эрчмийн хувьд үсгийг мөн л хоёр өөр элементийн (цэг ба зураас) эвдүүлэг хэлбэртэй дүрсэлдэг юм. Бид энд энэ системийг нарийн тайлжгүй.

Үүний учир нь ямар ч хэл, үүнд мөн орос хэл, тодорхой зохион байгуулалтай байдагт оршино. Үүнд зариуцсан ба үсгийн хос олон, зарим нь цөөн дайралдах ба мөн зарим нь (жишээ нь эгшгийн дараа зөөлний тэмдэг) ер дайралддаггүй. Үсгүүдийг ямар ч тэмдгээр сольсон ч энэ зохион байгуулалт дараа хадгалагдан үлдэх тул тийм системийн нууцын түлхүүрийг хялбархайд тайлж болно. Үүнээс нэлээд илүү төвөгтэй системүүд байдаг боловч мөн тэдгээрийг туршлагатай нууц тайлагч нарын тайлах нь ховор биш байдаг.

«Нууцыг багтай хадгалах тийм нууцын систем эсвэл зарчмын хувьд ямар ч нууцлагдсан мэдээг уншиж чадах хангалттай чадвартай нууц тайлагч байдаг уу? гэдэг асуулт аяндаа гарна.

Үнэн хэрэгтээ маш хялбар боловч нууцын түлхүүргүй хүн нууцлагдсан сэдвийг огтхон ч уншиж чадахгүй гэдэг нь эргэлзээгүй тийм системийг амархан бодож болдог байна. Тийм системийг зохиохын тулд өмнө зүйлд ярьсан хоёртын систем ба үсгийг таван оронтой хоёртын тоогоор бичлэг болон орлуулдгийг ашиглая.

Цахилгаан мэдээний кодын тусламжтай ямар ч сэдвийг тэг ба нэгийн таван оронтой эвлүүлгийн тодорхой дараалал байдлаар бичиж болно. Тэг ба нэгийн тийм тавтуудын дурын ямар нэгэн дарааллыг бид урьд нь бэлдсэн гэж үзье Сэдвийг нууцлахад зориулагдсан тийм дарааллыг гамм гэдэг. Бид гаммыг тусгай цаасан туузан дээр жишээ нь пүхнүүдийн дараалал хэлбэртэй бичиж урьдаас бэлдэнэ (2 дугаар зураг) Тууза дээр хөндлөн эгнээ бүрд тодорхой таван оронтой эвлүүлэх харгалзах ба цоолсон нүх нь нэгжийг, нүхгүй бол тэгийг заана. Гаммын нэгийг өөртөө үлдээж нөгөө хувийг цахилгаан мэдээг барьж байгаа хүнд илгээнэ.



2 дугаар зураг

дараа нь дамжуулах гэж байгаа сэдвээ авч ирнэ. Бэлдсэн гаммтай «Орон бүрчлэн» нэмнэ. Энэ үр дүнд утгатай болохыг тайлбарлая. Сэдвийн анхны оронтой тоог (өөрөөр хэлбэл анхны үсгийг) дараагийн анхны тоон дээр, сэдвийн хоёрдахь тоог гаммын хоёрдахь тоотой гэх мэтчилэн нэмэх ба гэхдээ өөр нэгжийн нийлбэр¹ (орон хэтэргвэл) дараачийн орны нийлбэрт өгдөг жирийн дүрмээр биш

$$0+0=0; 1+0=0+1=1; 1+1=0.$$

Энэ дүрмээр нэмнэ. Өөрөөр хэлбэл хоёр нэгжийн нийлбэрийн эхмэд оронд шилжүүлэхгүйгээр нэмнэ. Хоёртын өөр тоог өөрөөр хэлбэл нэгж ба тэгийн ямар нэгэн өөр дарааллыг ийм аргаар нэмбэл, хэрэв эдгээр тоонууд нь адилхан бол тэг гарах ба хэрэв өөр тоонуудын нэмсэн бол тэгээс ялгаатай үр дүнд хүрнэ. Сэдэв өөр гаммыг ингэж «Орон бүрчлэн» нэмэхэд гарсан нийлбэрийг манай мэдээ хүлээн авагчид цахилгаан мэдээний шугамаар цахилгаан дохионуудын систем хэлбэртэйгээр дамжуулж болно. Гэвч хэрэв энэ дарааллыг шууд цахилгаан мэдээний аппаратад оруулбал тэр нь учир утгагүй хэсэг үсгийг хэвлэх болно Анхны сэдэвнээс дахин сэргээхийн тулд нууцлагдсан сэдэвт дахин мөн тэр гаммыг нэмэх хэрэгтэй (мөн тэр орон бүрчлэн нэмэх аргаар). Бүх үйлдлийг дараахь схемээр дүрслэж болно.

1. Сэдэв + Гамм = нууцлагдсан сэдэв.
2. Нууцлагдсан сэдэв + Гамм = сэдэв + Гамм + гамм = сэдэв. Нууцлагдсан сэдвийг гарган барьсан боловч харгалзах гамм байхгүй хүн бол үүний агуулгыг огт мэдэж чадахгүй гэдгийг ойлгоход амархан ба энэ нь үлгэрлэвээс хэрэв $x + y$ хэмжигдүүн мэдэгдэж байгаа боловч y нь ямар нэгэн дурын тоонд үл мэдэгдэх тоо бол бид x хэмжигдхүүний дахны тоу ч хэлж чадахгүйтэй адил болно. Дээр дурдсан процессыг цахилгаан мэдээний аппаратын гаралт дээр нь нэвтрүүлж байгаа сэдэв ба гаммыг орон бүрчлэн нэмдэг байгууламжийг тавьж хүлээн авах аппаратад оролт дээр өөр мөн тийм байгууламжийг тавьж автоматаар хялбархан гүйцэтгэж болно. Дурдсан нууц-

лах систем нь нэлээд нүсэр болох нь мэдээж юм. Учир нь түүнийг гүйцэтгэхийн тулд шугамын хоёр төгсгөлд цаг ямагт нөөц гаммыг хүргэх хэрэгтэй бөгөөд тийм гамм бүр нь зөвхөн ганцхан удаа ашиглагдана. Энэ хоёртын системийг хэрэглэхэд тохиромжтойн учир нь гэвэл чухамхүү энэ системд ямарч тоог өөрийг нь өөр дээр нь нэмэхэд тэг гардагт оршино.

12§. Тооцон бодох машины тухай хэдэн үг

Харьцангуйгаар техникийн дээр үед гарсанахмал сал бар болох цахилгаан мэдээнд хоёртын системийг хэрэглэх талаар бид дээр ярьсан. (Цахилгаан дохиог утсаар дамжуулах дээр үндэслэсэн анхны цахилгаан мэдээний аппарат нь өнгөрсөн зууны 30-аад оны үед гарсан) Одоо бид хоёртын системийн сүүлийн үеийн хэрэглэний нэг болох тооцон бодох машинд түүнийг хэрхэн ашигладаг талаар товч авч үзье. Электрон тооцон бодох машин нь юу болох тухай ядаж ерөнхий тоймыг нь эхлээд хэлэх хэрэгтэй боллоо.

Тооцон бодох техникийн хөгжлийн түүх нь нэг талаар маш урт нэг талаар маш богино юм. Тооцон бодох ажлыг хөнгөвчилж хурдасгасан анхны тооцон бодох багажууд эрт дээр үед бий болжээ. Жишээ нь жирийн саминг дөрвөн мянга гаруй жилийн өмнөөс хэрэглэж байсан боловч жинхэнэ «машинны математик» нь бараг цаалахад 15—20-иод жилийн өмнө радиоэлектроникийн техник (радио ламп ба дараа нь хагас дамжуулагчууд хэрэглэн гарсан анхны хурдан бодлог тооцон бодох машинууд буй болсноор эхлэн үүссэн юм. Богчихон хугацааны дотор техникийн энэ салбар гайхалтай амжилтанд хүрсэн. Орчин үеийн тооцон бодох машинууд нь секундэд зуун мянга түүгээр ч барахгүй сая үйлдлийг хийх хурдтайгаар ажилладаг ба өөрөөр хэлбэл туршлагатай тооцон бодогч арифмометрээр (тооны машинаар) хэдэн сар хийх үйлдлийг тийм машин ганц секундэд гүйцэтгэдэг байна. Тийм машинууд гарснаар гар аргын үед хэлэхэд ч хэцүү байсан төвөгтэй нүсэр хүнд бодлогуудыг амжилттай бодох боломжтой болжээ. Жишээ нь орчин үеийн тооцон бодох машин нь хэдэн зуун үл мэдэгдэхтэй төчнөөн тооны нэгдүгээ

сэргийн тэгшитгэлүүдийн системийг бодох бүрэн тооцолтой юм. Харандаа цаас буюу эсвэл тооны машинар зэвсэглэсэн тооцон бодогч бол тийм бодлогыг бүх амьдралынхаа туршид ч бодож амжихгүй байсан билээ.

Хябарчилсан ном зохиолд тооцон бодох машинуудын тухай дурдахдаа «Хүнд хэцүү тэгшитгэлүүдийг бодлог машин», «Шатар тоглодог машин» «нэг хэлнээс нөгөө хэлэнд орчуулагч машин» зэргийн хэллэгүүдийг ойнга хэрэглэдэг. Энэ үед, тэгшитгэл бодох, шатар тоглох, орчуулах гэх мэтийн үүрэгт ажлуудыг чухам шинэ үүрэгтэй тусгай машин гүйцэтгэдэг гэсэн буруу сэтгэгдэл төрж болох юм. Үнэл хэрэгтээ математикийн ба (тэгшитгэл бодох, логарифмын хүснэгт зохиох гэх мэт) математикийн бус жишээ нь сэдэв орчуулах, шатар тоглох төрөл бүрийн асуудлуудыг шийдэхэд универсал тооцон бодох машин гэж нэрлэгдэх зөвхөн ганц л төхөөрөмжийг ашиглаж болно. Үнэнийг хэлэхэд тийм машин болгон нь тоонуудыг нэмэх ба хуваах, гарсан үр дүнг машины «ой» гэж нэрлэгдэх тусгай төхөөрөмжинд хадгалах, хоёр эсвэл хэд хэдэн тоонуудыг хамгийн их буюу хамгийн багц сонгон авч тоонуудыг хооронд нь жиших гэх мэтийн тун явцуулалтад хэдэн төрлийн цөөн тооны зөвхөн хэдхэн жилийн үйлдлүүдийг гүйцэтгэж чадна. Гэхдээ олон төрлийн хүнд төвөгтэй бодлогуудыг бодох явдлыг тийм хялбар үйлдлүүдийн дараалалд (маш урт байж болзоныг) шилжүүлж болно. Энэхүү үйлдлүүдийн дарааллыг математикч-программын зохиосон программаар тодорхойлогдоно. Ийм учраас универсал тооцон бодох машины олон янзын бодлогуудыг бодож чаддаг байх нь энэ машинд өгөх программ олон янз байхаас хамаарна.

Ингэхлээр зарчмын хувьд, универсал тооцон бодох машин нь: нэмэх, үржих, хасах, хуваах болон тоог жиших зэргийн өөр хэд хэдэн арифметикийн үйлдлийг тоон дээр ер бусын түргэн гүйцэтгэж чаддаг гэхдээ чухам ямар үйлдлүүдийг ямар дараалалтай гүйцэтгэх нь программаар тодорхойлогдох төхөөрөмж юм.

Гараар эсвэл тооцон бодох машины алианаар ч тооцоо хийх үед үйлдэл хийх тоонуудаа ямар нэг байдлаар бичих хэрэгтэй болдог. Өөрөөр хэлбэл ямар нэгэн тооллын системийг ашиглах хэрэгтэй. Харандаа цаас шигшлэн бодохдоо бид дадал болсон аравтын систе-

мээ хэрэглэнэ. Гэвч цахилгаан тооцон бодох машины хувьд бол аравтын систем нь тохиромж муутай байдаг. Тийм машин нь хоёртын системийг давуутай гэж үзнэ. Бид одоо үүний шалтгааныг тайлбарлахыг хичээе.

13§. Цахилгаан машин яагаад хоёртын системийг «эрхэмлэдэг» вэ?

Хэрэв бид тооцоог гараар хийх бол тоог харандаа буюу бэхээр цаасал дээр бичдэг. Машины хувьд бол тэр үйлдэл хийж байгаа тоонуудаа тэмдэглэх ямар нэгэн өөр арга хэрэгтэй. Үүний учрыг тайлбарлахын тулд эхлээд тооцон бодох машин биш түүнээс маш илүү энгийн жирийн тоолуурыг (цахилгааны, хийн, таксийн тоолуур гэх мэтийг) авч үзье.

Тийм ямар ч тоолуур нь тус бүр нь 0-оос 9 хүртэлх цифрүүдэд харгалзах 10 байрлалын аль нэгэнд байх хэдэн жижиг дугуйнуудаас тогтоно. k ширхэг жижиг дугуйнуудаас тогтсон тийм байгууламж нь 0-оос 99...9 хүртэлх янз бүрийн 10^k тоог тэмдэглэж чадах k

нь тодорхой юм. Тийм тоонуудыг зөвхөн тоог тэмдэглэхэд төдий биш мөн арифметик үйлдлүүд гүйцэтгэх зорилгод нэгэн төрлийн самнигчид адил ашиглаж болно. Аравтын системд биш өөр ямар нэгэн суурьтай системд зохицсон тоолууртай байхыг бид хүссэн бол тийм тоолуур нь 10 биш харин p янзын байрлалд байж болох жижиг дугуйнуудаас тогтох байсан. Тухайлбал хоёртын системд бичигдсэн тоог тэмдэглэж болох тийм байгууламж тус бүр нь хоёр байрлалын алинд нь ч байрлах элементүүдийг агуулах ёстой болно. Тоолуурын бүтцэнд нь ямар нэгэн тооллын системд үндэслэгдсэн заавал жижиг дугуйнуудыг ашиглах нь албагүй гэдэг нь тодорхой юм. Зарчмын хувьд тоолуурыг ямар ч элементүүдээс хийж болох бөгөөд гэхдээ элемент бүр нь зөвхөн бидний сонгож авсан тооллын системийн суурь нь хичээл нэгж агуулж байна мөн төчнөөн тооны тогтзорттой байрлалтай байх нь чухал юм.

Дугуйны систем буюу эсвэл өөр ямар нэгэн механик төхөөрөмж бүхий тоолуур нь байрлалаа харьцангуй удаан өөрчилж чадна. Орчлон үеийн тооцон бодох машинуудын ажилладаг хурд болох секундэд арав хэдэн

наун мянга сая үйлдлүүд нь эдгээр машинуудад механикийн биш харин цахилгааны төхөөрөмж ажилладаг болсноор боломжтой болсон байна. Тийм төхөөрөмж нь бараг инерцгүй учраас секундын саяны хувь болох эрэмбэтэй хугацааны дотор өөрийн байрлалаа сольж чаддаг байна.

Тооцон бодох машинд голлон ашигладаг радио-электроникийн элементүүдийн (радиолампы, хагас дамжуулагч элементүүд) хувьд хоёр тогтмол төлөв байдал байдаг онцлогтой юм. Жишээ нь электроны лампы нь «нээлттэй» (түүгээр гүйдэл гүйж байхад) эсвэл «хаалттай» (түүгээр гүйдэл гүйгээгүй үед) байж болно. Сүүлийн үед тооцон бодох техникт өргөн хэрэглэгдэж байгаа хагас дамжуулагч элементүүд нь «тийм» буюу «үгүй» гэдэг зарчмаар ажилладаг юм.

Тооцон бодох машинд чухамхүү хоёртын систем хамгийн их тохиромжтой байдаг үндсэт шалтгаан нь радиоэлектроникийн элементүүдийн эзэ чатар бол ю. Ямар нэгэн бодох бодлогыг өгөгдсөн зүйлүүд нь ихэвчлэн шийтгэд түгсэн аравтын системд бичигдсэн байдаг. Иймд хоёртын системд тулгуурласан машинд дүгээр мэдээнүүдийг боловсруулахыг тулд уг мэдээ нь машины арифметикт байгууламжийн «ойлгомжтой» хэд болох хоёртын кодоод (нэрд) шилжигдсэн байх ёстой. Ийм шилжүүлгийг автоматаар гүйцэтгэж болох нь эргэлзээгүй. Машины бодсог үр дүнг нь дахин аравтын системд бичих шаардлагатай. Ийм учраас тооцоо болох машинд хоёртын системд гарсан үр дүнг аравтын системд автоматаар шилжүүлэх байгууламжийг урьдчилан бодож байрлуулсан байдаг.

Тооцон бодох машинд бичлэгийн завсарын хэлбэр болгож гол төлөв хоёрт аравтын холимог системийн хэрэглэдэг. Тэр системд эхлээд тоог ердийн аравтын системийн тусламжтайгаар бичих ба дараа нь түүнд оролцсон цифр бүрийг тэг ба нэгээр хоёртын системд бичих явдал болно. Иймд ямар ч тоо нь хоёрт-аравтын системд нэг ба нэгээс зохиосон хэд хэдэл хэсэг хэлбэртэй бичигддэг.

Жишээ нь тоо

2593

хоёрт-аравтын системд

0010 0101 1001 0011

гэж бичигдэнэ. Харьцуулж үзэхийн тулд энэ тооны хоёртын бичлэгийг сийрүүлэе.

10100010001

Хоёртын системд үндэслэгдсэн тооцон бодох машин нь арифметик үйлдлүүдийг яаж гүйцэтгэдгийг авч үзье. Авч үзвэл зохих үндсэн үйлдэл нь нэмэх үйлдэл болно. Учир нь үржих нь олон дахин нэмэхэд хасах нь эсрэг тоог нэмэхэд эцэст нь хуваах нь олон дахин хасах алхамд шилждэг. Олон оронтой тоонуудыг нэмэх үйлдэл нь болохоор орон бүрчлэн харгалзах үйлдлүүдийг гүйцэтгэхэд шилжинэ.

Хоёртын хоёр тооны орон бүрд нэмэх үйлдлийг дараах маягаар дүрсэлж болно.¹

a — нэгдүгээр нэмэгдхүүний өгөгдсөн оронд орших цифр

b — хоёрдугаар нэмэгдхүүний мөн тэр оронд орших цифр c нь өмнөх орноос шилжүүлэх хэрэгтэй цифр (энд бид нэмэх үйлдлийг гүйцэтгэсэн гэж үзэж байна) байг. Өгөгдсөн оронд нэмэх үйлдлийг гүйцэтгэнэ гэдэг нь нийлбэрийн тэрхүү оронд ямар цифр бичигдсэн байх ёстой ба дараачийн оронд юу шилжүүлэх ёстойг заана гэсэн үг мөн. Нийлбэрийн өгөгдсөн оронд бичигдэх ёстой цифрийг s үсгээр дараачийн оронд шилжүүлэх ёстой тэр хэмжигдхүүнийг t үсгээр тус тус тэмдэглэе.

a, b, c, s, t хэмжигдхүүн тус бүр нь зөвхөн 0 ба 1-ийн аль нэг утгыг авч болох тул бүх боломжит байдлыг дараахь хүснэгтэнд харуулав.

Ийм учраас хоёртын системд бичсэн хоёр тоог тооцон бодох машин нэмж чадахын тулд түүнд a, b, c хэмжигдхүүнүүдэд харгалзсан гурван оролттой s, t хэмжигдхүүнүүдэд харгалзсан хоёр гаралттай тийм байгууламж орон бүрийн хувьд байх ёстой болно. Электрон байгууламжуудад ихэвчлэн байдагтай адил тухайн оролт буюу гаралт дээр гүйцэтгэж бол нэгийг, гүйцэтгэж бол тэгийг заана гэж авч үзнэ. Нэг оронд нийлбэр жүжүүлэгч (сумматор) гэж нэрлэгдэх бидний авч үзэж байгаа байгууламж нь дээр

¹ Энд 11§-д сэдвийг нууцлах боллоготой холбогдон дурдагдсан «орон бүрчлэн» нэмэх үйлдлийн тухай биш жирийн «арифметикийн» нэмэх тухай ярьж байна.

a	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
b	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
c	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
s	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
t	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

хаасан хүснэгтийг дагуу ажиллах ёстой. Өөрөөр хэлбэл хэрэв аль ч оролт дээр үйлдэл өгөгдөөгүй бол мөн аль ч гаралт дээр гүйцэтгэж байх ёстой хэрэв гүйцэтгэл өгөгдсөн b ба c -д өгөгдөөгүй бол s дээр гүйцэтгэж t дээр гүйцэтгэж байх ёстой гэх мэт. Тийм маягаар ажиглах байгууламжийг электрон ламп ба хагас дамжуулагч элементүүдээр зохион бүтээх нь хэцүү юм.

14§. Гуравтын системийн нэгэн гайхамшигт чанарын тухай

Тооцон бодох машин зохион бүтээхдээ ямар нэгэн тооллын систем түүнд үндэс болоход хэр тохирох эсэхийг үнэлэхдээ тэрхүү тооллын системд арифметикийн үйлдлүүдийг гүйцэтгэхэд хэр зэрэг хялбар байхыг авч үзэхээс гадна мөн системийн хэмнэлттэй байх талыг авч үздэг. Систем хэмнэлттэй байна гэдэгт: тодорхой тооны тэмдгийн тусламжаар өгөгдсөн системд бичиж болох тоонуудын нөөц гэж ойлгоно. Үүнийг жишээн дээр тайлбарлая. Аравтын системд 0-оос 999 хүртэлх 1000 тоог бичихийн тулд 30 тэмдэг (орон бүрд 10 цифр) чийлшгүй хэрэгтэй. Харин хоёртын системд 30 тэмдгийн тусламжтайгаар 2^{15} өөр тоог (учир нь аль ч хоёртын орон бүрд зөвхөн хоёр 0 ба 1 цифрийн нэг байх тул бид 30 цифрийн тусламжтайгаар 15 хүртэл оронтой тоог бичиж чадна) бичиж болно.

$$2^{10} > 1000$$

учраас хоёртын 15 орноор аравтын гурван орноо бичдэгээс илүү их янз бүрийн тоог бичиж болно. Иймд хоёртын систем нь аравтын системийг бодвол илүү хэмнэлттэй юм. Тооллын ямар систем нь хамгийн хэмнэлттэй байдаг вэ? Энэ асуулганд хариулахын тулд дараахь тодорхой бодлого авч үзье.

Бидний мэдэлд 60 тэмдэг байсан байг. Бид тэдгээрийг тус бүрд нь 2 элемент байхаар 30 хэсэгт хувааж чадах ба тэдгээрийн тусламжтайгаар хоёртын системд хоёртын 30-аас ихгүй оронтой ямар ч тоог өөрөөр хэлбэл нийт 2^{30} тоог бичиж болно. Мөн эдгээр 60 тэмдгийг тус бүр нь 3 элементтэй 20 хэсэгт хувааж гурвантын системийг ашиглан 3^{20} өөр тоог бичиж чадна. Цааш нь 60 тэмдгийг тус бүр нь 4 элементтэй 15 хэсэгт хувааж дөрөвтийн системийг хэрэглэн 4^{15} тоо бичнэ гэх мэт.

Тухайлбал бүх тэмдгээ тус бүр нь 10 элементтэй 6 хэсэгт хувааж аравтын системийг ашиглан 10^6 тоог бичиж болох ба жартан (вазилогч) системийг ашиглаж 60 тэмдгийг тусламжтайгаар зөвхөн 60 тоог бичиж чадах байсан. Энд боломжийн системүүдээс аль нь хамгийн арвин байхыг өөрөөр хэлбэл өгөгдсөн 60 тэмдгийг тусламжтайгаар хамгийн их олон тоог бичиж болохыг харъя.

Өөрөөр хэлбэл

$$2^{30}, 3^{20}, 4^{15}, 5^{12}, 6^{10}, 10^6, 12^5, 15^4, 20^3, 30^2, 60$$

эдгээр тоолуудаас аль нь хамгийн их болох тухай ярьж байна. Энд хамгийн их тоо нь 3^{20} болно гэдгийг шалгахад амархан. Эхлээд

$$2^{30} < 3^{20}$$

гэдгийг харуулья.

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \text{ ба } 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$$

учраас бидний тэнцэтгэл бишийг

$$8^{10} < 9^{10}$$

хэлбэртэй бичиж болно. Энэ хэлбэрт батлах тэнцэтгэл

$$2^{30} < 3^{20}$$

гэвч илэрхий боллоо.

Цааш нь

$$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$$

учраас өмлө баталсан ёсоор $3^{20} > 4^{15}$ болно.

Үүнтэй адилаар дасаах тэнцэтгэл бишүүдийг гүйцэтгэн үнэн болохыг хялбархан шалгаж болно.

$$4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^6 > 12^5 > 15^4 >$$

$$20^3 > 30^2 > 60$$

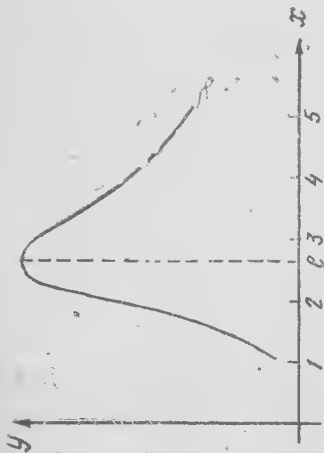
Ийнхүү гуравтын систем нь хамгийн хэмнэлттэй систем байна. Хоёртын систем болон хэмнэлттэй байх үргэн хувьд түүнтэй адил чанартай дөрөвтийн систем нь энэ талаар гуравтын системээс нэлээд дутуу болон бусад боломжит системүүдээс давуу байна.

Энэ гаргалгаа нь чухам 60 тэмдэг авч үзсэнтэй огт холбоогүй юм. Бид зөвхөн 60 тэмдгийг тус бүр нь 2, 3, 4 гэх мэт тэмдгүүдтэй хэсгүүдэд хуваахад тохиромжтой учраас энэ жишээг авч үзсэн болно. Ерөнхий гохиолдолд хэрэг n тэмдэг авч үзсэн системийн суурь болгон ямар нэгэн x -тоог авбал түүний оронгийн 100 нь $\frac{n}{x}$ байх ба энэ үед бүгд

$$\frac{n}{x} \quad (x)$$

тоог бичиж болно.

Энэ илэрхийллийг зөвхөн бүхэл утга төдийгүй дурын (бутархай, иррациональ) эерэг утга авч болох x хуваагчаас хамаарсан функц гэж авч үзье. Энэ функц максимум (хамгийн их) утгаа авах x хуваагчийн тэргүүг олж болно. Тэр нь дээд математикийн хамгийн гүн олон янзын асуудалд чухал үүрэг гүйцэтгэдэг



3 дугаар зураг.

натурал логарифм гэж нэрлэгдэх логарифмын суурь болох иррациональ тоо e -тэй тэнцүү байна. e тоо нь ойролцоогоор

2, 718281828452045...

тэнцүү байдаг. е-д хамгийн ойр бүхэл тоо нь 3 болно. Иймд 3 нь хамгийн арвин, тооллын системийн суурь болно.

$y = (x)^n$ функций график нь 48 дугаар зураг дээр зу

раагдсан болно. (х ба у тэнхлэгийн дагуу ялгаатай маш таб авав) тооллын системийн арвин чанар бол түүнийг тооцон бодох машинд ашиглахын үүднээс нь ав үзвэл багагүй чухал тал юм.

¹ Дифференциал тооллын эхлэлтэй танил уншигчдад зориулж харгалзах гаргалгааг хийе. $u(x)$ функц өгөгдсөн x_0 цэг дээр максимум утгыг авах зайшгүй нөхцөл нь түүний уламжлал нь энэ цэг дээр тэгтэй тэнцэх явдал байдаг. Өгөгдсөн тохиолдолд $u(x) = x^2$. Энэ функцийг уламжлал нь

$$d_y \frac{d_y}{d_x} = \frac{-n}{x^2} (x)^{\frac{n}{x}}$$

$$\ln x + \frac{n}{x} \cdot 2 = n(x) \cdot 2 \quad (1 - \ln x) \text{ байна.}$$

Түүнийг тэгтэй тэнцүүлж бодвол $\ln x = 1$ өөрөөр хэлбэл $x = e$ байна.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \text{ нь } x = e \text{ цэгийн } y \text{ талд эерэг баруун тал}$$

сөрөг тул дифференциал тооллын хялбар теорем ёсоор функц энэ цэг дээр максимумтай байна.

40

15§. Хязгааргүй бугархайн тухай

1000 хүртэл бид бүхэл тоонуудын тухай ярьсан. Эхний тооны аравтын бичлэгээс аравтын бутархайд шилжих нь зүйтэй. Үүний тулд 10-ыг сөрөг биш зэргүүцээс гадна (өөрөөр хэлбэл 1, 10, 100 гэх мэт) түүний сөрөг зэргүүдийг (10^{-1} , 10^{-2} гэх мэт) авч үзэж тэдгээрийг аль аль нь оролцсон эвлүүлгийг зохиох хэрэгтэй болно.

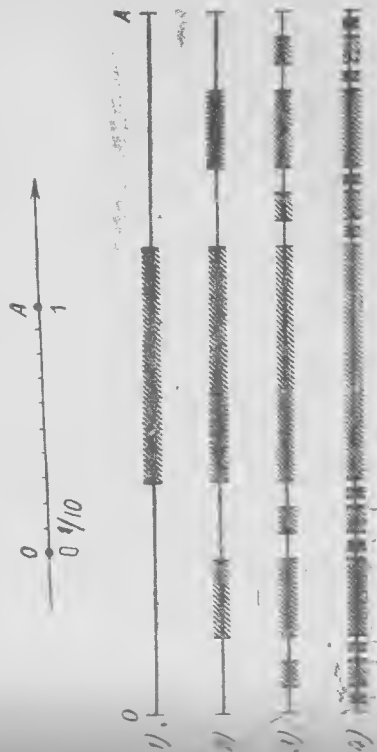
ЧЕЛОВЕК

23,581

ИСКРИ ИЛЭРХИЙЛЭЛ НЬ:

$$2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

ОЮХЫГ ЗААНА ГЭХ МЭТ.



4 дүгээр зураг

Янз бүрийн тоонуудыг шулуун дээр цэгээр дүрслэхэд тохиромжтой байдаг. Ямар нэгэн шулуун авч түүнд дээр тодорхой o цэг (тооллын $эх$) эерэг чиглэл (баруун тийш нь) ба масштабын нэгж OA хэрчмийг тус тус сонгож авна (4 дүгээр зураг). O цэг нь тэгийг, A цэг нь нэгжийг дүрсэлж байна гэж үзэв. O цэгээс баруун тийш OA хэрчмийг хоёр, гурав гэх мэтээр үргэлжлүүлэн таслаж хоёр, гурав гэх мэт тоонуудад харгалзах цэгүүдийг гаргана. Ийм замаар шулуун дээр бүх бүхэл тоог дүрсэлж болно. Аравтын ба зуутын гэх мэт хувьтай бутархай тоонуудыг дүрслэхийн тулд OA хэрчмийг арав, зуу гэх мэт хэсэгт хувааж уртын эдгээр бага нэгжүүдийг ашиглах хэрэгтэй. Ийм замаар бид шулуун дээр

$$a_k \ a_{k-1} \dots \ a_1 \ a_0, \ b_1 \ b_2 \dots \ b_n$$

хэлбэрийн бүх болэмжит тоочуудад өөрөөр хэлбэл бүх болэмжит аравтын бутархайчуудад харгалзах цэгүүдийг тэмдэглэж чадна. Энэ үед шулуун дээр орших бүх цэгүүдийг тэмдэглэхгүй нь эргэлзээгүй. Жишээ нь хэв шулуун дээр o цэгээс нэгж талтай квадратын диагональтай тэнцүү хэрчмийг таслахад, квадратын тал ба диагональ нь өөр хоорондоо хэмжилгүй учраас энэ хэрчмийн төгсгөл нь ямар нэгэн аравтын бутархайд харгалзсан цэг болж чадахгүй.

Хэрэв бид шулууны цэг болгонд ямар нэгэн бутархайг харгалзуулахыг хүсвэл эзвхөн төгсгөлөг төдийгүй мөн төгсгөлгүй аравтын бутархайчуудыг авч үзэх хэрэгтэй болно. Үүний утгыг тайлбарлая. Шулууны цэг болгонд ямар нэгэн (төгсгөлгүй аравтын бутархайг дараах маягаар харгалзуулъя.

Тохиромжтой болгохын тулд бүх шулууны тухай түүний тодорхой хэсэг болох бидний масштабын нэгж болгож авсан OA хэрчмийг тухай ярих болно. x — нь элэ хэрчмийн ямар нэгэн цэг бэйг. OA хэрчмийг 10 тэнцүү хэсэгт хувааж тэдгээрийг 0-оос 9 хүртэлх цифрээр дугаарлая. x цэгийг орших жижиг хэрчмийн дугаарыг b_1 -ээр тэмдэглэе. Энэ жижиг хэрчмийг дахин 10 хэсэгт хуваахад үүссэн хэсгүүдийг 0-оос 9 хүртэлх цифрээр дугаарлаж x цэгийг оршиж байгаа тэр жижиг хэрчмийг дугаарыг b_1 гэж тэмдэглэе. b_2 дугаартай хэрчмийг дахин 10 хэсэгт хуваагаад дээрх үйлдлийг дав-

b_1 -ийг олно. Алхам бүрд өмнөх алхамд гарсан хэрчмийн 10 хэсэгт хувилах замаар энэ үйлдлийг хязгааргүй үргэлжлүүлэх болно.

Үүний үр дүнд бид

$$b_1, \ b_2, \dots, \ b_n, \dots$$

ийн цифрүүдийн дарааллыг гаргах ба үүнийг

$$o, \ b_1 \ b_2 \dots \ b_n \dots$$

дүрлөлтэй бичиж x цэгт харгалзах хязгааргүй аравтын бутархай гэж нэрлэх болно.

Бид энэ бутархайг аль нэг газраар нь таслаж x цэгийг шулуун дээрх бийлэлийг нарийн биш ойлооноор (хэрэв хязгааргүй бутархайг n -дүгээр цифрээр нь тооцвал үндсэн хэрчмийн $\frac{1}{10^n}$ хэсгийг нарийвчлалтайгаар) тодорхойлж едийн (төгсгөлөг) аравтын бутархай $o, \ b_1, \ b_2, \dots, \ b_n$ -ийг гаргана.

Ингэж бид шулууны цэг болгонд нэг төгсгөлгүй аравтын бутархайг харгалзуулав. Энэ үед тодорхой биш зүйл зайлшгүй гарахыг ашиглахад хэцүү биш болно.

Энэ OA хэрчмийг 10 хэсэгт хувааж жишээ нь нэг ба хоёрдугаар хэсгийн хил дээр орших цэгийг авч үзэв. Эдгээр цухамдаа ийм гарна. Түүнийг бид нэгдүгээр (0 дүгээр) ба хоёрдугаар (1 дугаартай) хэсгийн алинд нь ч хамааруулж болох билээ. Нэгдүгээр тохиолдолд бид дараалан хуваах үйлдлийг үргэлжлүүлэхэд сонгосон цэг нь өмнөх алхамд гарсан хэрчмийн хуваалтын хамгийн баруун хэсэгт (өөрөөр хэлбэл дугаар нь 9 байх) бишгүй олж илрүүлэх ба өөрөөр хэлбэл түүнд хязгааргүй аравтын бутархай

$$0,09999 \dots$$

харгалзах ба хоёрдугаар тохиолдолд энэ цэг нь дарааллын хуваалт бүрд дугаар нь 0 байх хэсэгт орох тул

$$0,1000 \dots$$

бутархай харгалзана.

Иймд бид, ижил ганц цэгт харгалзах хоёр хязгааргүй бутархайг олов. Ямар нэг дараалсан хуваалтын үед хилийн (хоёр хэрчмийн хооронд) ямарч цэгийн хувь үүнтэй адил байдал гарна. Жишээ нь:

$$0,125000 \text{ ба } 0,124999 \dots$$

бутархайнууд шулуун дээр адилхан нэг нэгээр дүрслэгдэнэ.

Хилийн цэг бүрийг түүнийг агуулж байгаа хэрчмүүдийн эсвэл дандаа баруунд нь эсвэл дандаа зүүнд нь харгалзуулахыг тохирсны үндсэнд энэ тодорхой байдлыг арилгаж болно. Өөрөөр хэлбэл бид эсвэл дан ганц тэгээс тогтсон «хязгааргүй сүүлтэй» бүх бутархайнууд буюу эсвэл дан ганц есөөс тогтсон «хязгааргүй сүүлтэй» бүх бутархайнуудын аль нэгийг зайлуулж чадна.

Тийм зааглалыг оруулсны үндсэнд хэрчмийн ямарч цэгт цор ганц бүрэн тодорхой хязгааргүй аравтын бутархайг харгалзуулж болох ба энэ үед ялгаатай хоёр цэгт ялгаатай хоёр бутархай харгалзана.

Бид хэрчим дээрх цэгийн байрлалыг дараалан хуваах аргын тусламжтайгаар тэмдэглэхийг хүсэхдээ тухай бүр харгалзах өмнөх хэрчмээ чухамхүү 10 хэсэгт хуваасан нь огт чухал биш юм.

Энэ нь зөвхөн, бидний аравтын системд дадал болж түүнтэй, ажиллаж сурсны илрэл болно. Аравын оронд ямар нэгэн тоо тухайлбал хоёрыг авч өөрөөр хэлбэл хэрчмийг тухай бүр дундуур нь хувааж нэг хагаст нь дугаар 0, нөгөө хагаст нь дугаар 1-ийг бичиж дараа нь авч үзэж байгаа цэгийн орших тэр хагасыг сонгож авч болох байсан. Энэ үед бид цэг болгонд тэг ба нэгээс тогтох b_1, b_2, b_3 дарааллыг харгалзуулах ба түүнийг

$$(0, b_1 b_2 \dots b_n)_2$$

хэлбэртэй бичиж хязгааргүй хоёртын бутархай гэж нэрлэх нь зүйтэй байсан. Энэ дарааллыг аль нэг газраар нь таславал төгсгөлөг хоёртын бутархай

$$(0, b_1, b_2 \dots b_n)_2$$

буюу өөрөөр хэлбэл авч үзэж байгаа цэгийн байрлалыг

нэг хэрчмийн $\frac{1}{2^n}$ хэсэг хүртэл нарийвчлалтай тооцохтойгоо

$$b_1 \cdot \frac{1}{2} + b_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + b_n \cdot \frac{1}{2^n}$$

үснэ.

Шулуун дээрх бүх, цэгийг дүрсэлж болох хязгааргүй аравтын бутархайнууд нь дээд математикийн олон аргын суурь болдог бодит тооны онолын байгууллагад тохиромжтой хэрэгсэл болдог юм. Энэ үед түүнийг биш өөр ямар нэгэн (жишээ нь хоёртын, гуравтын гэх мэт) хязгааргүй бутархайнуудыг мөн ийм үр дүнтэйгээр ашиглаж болно.

Цэст нь дараахь сургамжтай бодлогыг авч үзье. Анхны OA хэрчмийг авч түүнийг гурван тэнцүү хэсэгт хувааж дунд хэсгийг нь орхив. (Хуваалтын цэгүүд нь мөн энэ дунд хэсэгт байгаа гэж үзээд тэдгээрийг мөн анх хяна) (4 б дугаар зураг). Дараа нь үлдсэн хэсэгт бүрийг мөл дахин гурван тэнцүү хэсэгт хуваах ба түүнийг дунд хэсгүүдийг мөл авч хаяна. Энэ үйлдлийг хязгааргүй үргэлжлүүлбэ. Энэ үед OA хэрчмийн дунд хэсэг үлдэх вэр гэсэн асуулт тавья.

Анх харахад тийм «цэвэрлэгээний», үр дүнд зөвхөн анхны цэгүүд O ба A үлдэх мэт санагдаж болно. Энэ нь дараахь дүгнэлтээр батлагдаж байгаа мэт санагдах болно. Дээр дурдсан үйлдлийн үед хаягдсан бүх хэрчмүүдийн уртыг олѳё (OA хэрчмийн урт нь 1 гэдгийг санаарх).

Анхны алхамд бид $\frac{1}{3}$ урттай нэг хэрчмийг хоёрдугаар алхамд тус бүр нь $\frac{1}{9}$ урттай хоёр хэрчмийг гу-

равдугаар алхамд тус бүр нь $\frac{1}{27}$ урттай дөрвөн хэрчмийг гэх мэтээр бид авч хаяна. Бүх хаягдсан хэрчмийн урт нь

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

гэд гэнцүү байх ба энэ нь анхны гишүүн нь $\frac{1}{3}$, ху-

ваарь нь $\frac{2}{3}$ -байх хязгааргүй буурах геометрийн прогресс болно. Түүний нийлбэр нь бидний мэдэх томъёо ёсоор

$$1 - \frac{2}{3} = 1$$

тай тэнцүү байна.

Иймд хаягдсан хэрчмүүдийн уртуудын нийлбэр нь анхны OA хэрчмийн урттай яг адил байна.

Гэвч дээр дурдсан үйлдэл нь хэрчим дээр O ба A цэгүүдээс гадна бас хязгааргүй олон цэгийг хаялгүй үлдээдэг юм. Үүнийг үнэмшихийн тулд дараахь зүйлийг хийе. OA нэгж хэрчмийн цэг бүрийг гуравтын системд бичсэн хязгааргүй бутархайн тусламжтайгаар дүрсэлбэ. Тийм бутархай бүр нь тэг, нэг, хоёроос тогтоно. Дээр дурдсан «дунд талыг нь хаях» үйлдэлд гуравтын бичлэгт нь ганц ч нэг ороогүй байх тийм цэгүүд (өөрөөр хэлбэл зөвхөн тэг ба хоёроос тогтох) үлдэнэ гэж би баттай хэлж чадна. Үнэндээ анхны алхамын үед нэгж хэрчмийн дунд хэсэг буюу нэгдүгээр байранд нь нэг байх тийм гуравтын бутархайнуудад харгалзах цэгүүдийг бид авч хаясан. Хоёрдугаар шатанд бид дахин үлдсэн хэсэг тус бүрийн дунд хэсэг буюу хоёрдугаар байранд нь нэг байх тийм бутархайнуудыг авч хаясан гэх мэт (Энэ үед бид гуравтын хоёр бутархайгаар дүрслэгдэх ба эдгээрийн ядаж нэг бутархай нь нэгийг агуулах тийм цэгийг мөн хаясан). Жишээ нь: OA хэрчмийн гурав хуваасны эхний хэсгийн төгсгөл буюу тоо $\frac{1}{3}$ -ийг

$$0.1000$$

$$0.0222 \dots$$

бутархайнуудаар дүрсэлж болох ба энэ цэгийг бид хаясан.

Иймд дээрх үйлдэл нь OA хэрчим дээр зөвхөн тэг ба хоёроос тогтох бутархайнуудад харгалзах цэгүүдийг үлдээж байна. Тийм бутархайнууд хязгааргүй олон болохоор OA хэрчим дээр түүний төгсгөлүүдээс гадн

нааргүй олон цэг үлдэж байна. Жишээ нь: тоо $\frac{1}{4}$ -ийн гуравтын задаргаа болох

$$0.020202 \dots$$

бутархайд харгалзах цэг үлдэнэ. Үнэндээ төгсгөлгүй гуравтын бутархай

$$2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-6} + \dots$$

$$0.020202 \dots$$

$$0.020202 \dots$$

геометрийн прогрессын нийлбэр бөгөөд дээр дурдсан томъёо ёсоор энэ нийлбэр нь

$$\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}$$

тай тэнцүү байна. Дараахь тодорхой харагдах геометр үйлдлээний үндсэнд $\frac{1}{4}$ цэг нь хаягдалгүй үлдэнэ гэж үнэмшиж болно.

Энэ цэг нь бүх хэрчим $[0.1]$ -ийг $1:3$ харьцаагаар хуваана. $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ хэрчмийг авч хаясны дараа цэг $\frac{1}{4}$ кв

на $0; \frac{1}{3}$ хагас завсарт үлдэх ба түүнийг $3:1$ харьцаагаар хуваана. Хоёр удаа хаясны дараа тэр нь $[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}]$ завсарт үлдэх бөгөөд түүнийг $3:1$ харьцаагаар ху-

ваана гэх мэтээр аль ч алхамд цэг $\frac{1}{4}$ нь хаягдахгүй. Иймд дээр дурдсан «Дунд талыг нь хаях» үйлдлийн үндсэнд хэрчим дээр «огт байр эзэлдэггүй» боловч (бид-ийн олсон ёсоор бүх хаягдсан хэрчмүүдийн урт нь нэг-ийн тэнцүү байсан) хязгааргүй олон цэгийг агуулаг-ийн цэгүүдийн олонлог байдаг нь мэдэгдэж байна. Эд-ийн цэгүүдийн олонлог нь өөр сонирхолтой чанарууд-ийн бөгөөд тэдгээрийг судлах нь бидний энэ жижиг но-мны хүрээнээс гарах ойлголт ба мэдэгдхүүнүүдийг

харагдах тул үүгээр номоо дуусгая.

Өмнөх үг

Тус товхимол нь Москвагийн математикийн 24 дүгээр олимпиадад оролцсон 8 дугаар ангийн сурагчдад 1966 оны 4 дүгээр сарын 20-д зохиогчийн уншсан лекцийн агуулгыг тусгажээ. Энэхүү товхимлын тэр лекцээс ялгарч гол зүйл гэвэл зүйл бүр дасгалтай тэдгээрийн арай хүндий нь одоор тэмдэглэсэнд оршино. Номын төгсгөлд зарим дасгалын хариу заавар хавсаргав. Уншигчдад бүх дасгалыг биш ч гэсэн тэдгээрийн ихэнхийг бодож зөвлөе, зөвхөн ингэж ажилласнаар л уг номыг үнэхээр ойлгож эзэмшиж чадна. Жишгээр бичигдсэн хэсгийг эхний үед уншихгүй байж болно.

Товхимлыг бичихдээ зохиогч өөрийн бичсэн: «Олонлогийн ба хэллэгийн алгебр» (Детская энциклопедия, Т. II, «Провесцене» 1934. 383—393 тал ба «Будийн алгебр» (Обзорник «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики.» «Провесцене» 1935, 230—324 тал) өгүүлүүдийг ашиглав.

Товхимлын төгсгөлд заагдсан нэмэлт зохиолууд нь Будийн алгебратай гүнзгий танилцахад ашигтай.

Зохиогч үнэт зөвлөлтөө өгсөн явдалд Г. С. Г Гиндикинд, өөрийн санаачилгаар редакторласан явдалд Ф. И. Кизнерт талархнаа илэрхийлж байна.

Москва, октябрь 1936
И. М. Яглом

1 §. Тоон буюу олонлогийн алгебр

Бид арифметик¹ ба алгебрийн хичээлд янз бүрийн тоонуудыг судалдаг. Нэгдүгээр ангидаа хүүхдүүд бүхэл тоотой тааралдахад тэдгээрийн ихэнх нь энэ тооны талар ямар нэг хэмжээний мэдлэгтэй ирдэг болохоор тэдэнд бэрхшээл учирдаггүй юм. Гэтэл цаашид улам их шинэ шинэ «тоо» гарч ирнэ. Одоо бид тэдэнд хэрхэн ийнхүү дасчихаад тэд ч бидний гайхлыг төрүүлэвч бийжээ. Тооны ойлголтыг өргөтгөх шат бүхэндээ талар ямар нэг хуурамч ойлголт төрүүлдэг зүйлүүдээс талар хэрэгтэй болдог.

Тэр олонлог хичнээн юмсыг агуулж байна вэ? гэсэн асуултанд бүхэл тоо хариу өгнө. Тэгвэл бутархай юунд хариу өгөх вэ? Ангид

$33\frac{1}{3}$ —сурагч эсвэл ширээн дээр $3\frac{1}{4}$ —таваг байж болохгүй шүү дээ. Гэтэл ширээн дээр $4\frac{1}{2}$ —алим байж

бино, кино $1\frac{3}{4}$ —цагт гарч болно. Үүгээр бид юмс бутархай тоогоор хэмжигдэж болно гэдэгт дөнгөж дасаж авчлаа. Сөрөг тоонууд яаж гарч ирэх вэ? Шүүгээнд-3-ийн байж яагаад ч болохгүй. Энэ бол ёстой байж болохгүй зүйл. Гэтэл термометр-5° зааж болно, эсвэл амьс-50 мөнгө байж болно, энэ сүүдчийнх нь зөвхөн чин хувьд бол уйтгартай, харин математикийн хувьд бол юм биш юм. Гэтэл ахлах ангиудад бол бүр «аймшиг-ын» тоонууд эхлээд $\sqrt{2}$ мэтийн иррационал тоонууд оруулахад «бодлогогүй» ухаангүй» гэсэн утгатай латин «irrationalis» гэдэг үгээр эдгээр тоог нэрлэжээ,

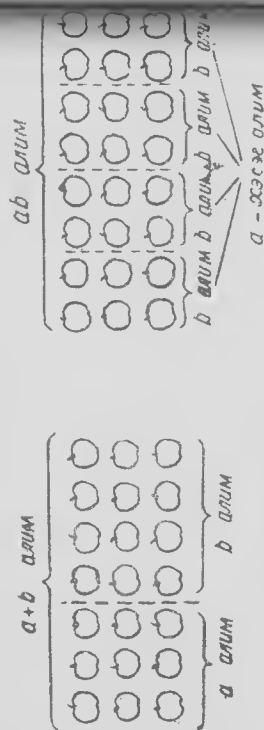
¹ Хуучин системийн сургуулийг ярьж байна хэв. ред

харин сүүд рүүгээ $1+2n$ мэтийн хуурмаг тоонууд гарч ирдэг ба тийм тоонуудад хүмүүс дасаагүй байхдаа яахыг харцаж байсныг энэхүү нэрс харуулж байна. Одоохондоо ч энэ тоонуудыг мэдэхгүй, тэдгээртэй танилцаасуудал чиний өмнө тулгарч байгаа² ч гэсэн энэ чинь номыг уншихад саад болохгүй.

Иррационал ба хуурмаг тоонууд нь юмсын тоо хэмжээг тодорхойлох тооны тухай анхны ойлголтоос хийнээн хол ч гэсэн, тэднийг «тоо» гэж нэрлэдэг.

Энэ олон янзын тоонуудад ямар ерөнхий зүйл байгаагаас тэдгээрийг «тоо» гэдэг нэгэн адил нэрээр нэрлэх болоо вэ? Энэ бүх хэлбэрийн тоонуудын хоорондох үндсэн төсөө нь гэвэл эдгээрийг нэмж, үржих болдогт оршино.

Гэтэл энэ төсөө нь ч хэлбэр төдий юм. Учир нь гэд бүх хэлбэрийн тоог нэмж, үржүүлж чаддаг ч гэсэн энэ үйлдлүүд нь янз бүрийн тохиолд янз бүрийн утганаатай байдаг юм. Жишээ нь a ба b гэсэн хоёр бүхэл эерэг тоог нэмэх гэдэг нь нэгдүгээр нь a юмтай



5 дугаар зураг

6 дугаар зураг

¹ Одоо үед $2i$ эсвэл $\sqrt{2i}$ мэтийн тоонуудыг тоо (цэвэр хуурмаг тоо) гэсэн нэр томъёог хэвээр үлдээгээд харин $1+2i$ мэтийн тоонуудыг комплекс тоо гэж нэрлэх болжээ. $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ мэтийн тоонуудыг бодит тоо гэдэг.

² Төрөл бүрийн тоонуудын талаар А. Нивен, Числа рациональные и иррациональные, «Мир» 1936 гэдэг хялбархан номыг унши болно.

³ Гэрч хасах юмуу хуваахгүй. Учир нь хэрэв бид зөвхөн эс тоонуудыг мэдэж байвал 3-аас 5-ийг хасах чадахгүй, харин бид зөвхөн бүхэл тоонуудыг мэдэж байвал 7-г 4-т хувааж чадах билээ.

хоёрдугаар нь b юмтай хоёр олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоог олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл 7^a ангид 35 сурагч 7^b ангид 39 сурагч байдаг гэвэл долоогийн энэ хоёр ангид $35+39=74$ сурагч суралцана мөн (5 дугаар зургийг хар).

Үүний адилаар эерэг бүхэл тоо a ба b -г үржүүлэх гэдэг нь тус бүр нь b юмтай a ширхэг олонлогийг нэгдэлд байх юмсын тоог олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл «ургуульд долоогийн гурван бүлэгтэй ба бүлэг бүр нь 36 сурагчтай гэвэл уг сургууль долдугаар ангийн $3 \cdot 36 = 108$ сурагчтай гэсэн үг (6 дугаар зургийг хар).

Гэтэл бутархай дээр юмуу сөрөг тоон дээр (иррационал юмуу хуурмаг тооны тухай цаашид онцгойлон ярихгүй юм) хийх нэмэх ба үржих үйлдлийг сайн тодорхойлсон байлаар өгөх боломжгүй юм.

Тийнхүү бид дараахь дүгнэлтэд хүрч ирэх шиг болно. Өөр төрлийн тоонуудыг нэгэн адил «тоо» гэж нэрлэдгийн учир нь тэдгээрийг бүгдий нь нэмж ба үржиж болдогт оршино. Гэтэл өөр өөр төрлийн тоонуудын хувьд нэмэх үржих хоёр үйлдэл нь эрс өөр өөр утгатай байна. Гэтэл энд бид жаахан яарчээ: Бүхэл ба бутархай тоог нэмэх нь үнэндээ тийм ч их ялгаатай үйлдэл биш л дээ. Нарийвчлан хэлбэл, энэ үйлдлүүдийн тодорхойлолт нь үнэндээ ялгаатай, харин эдгээрийн чанар яг адил юм. Ямарч төрлийн тооны хувьд

$$a + b = b + a$$

нэмэхийн байр солих хууль

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

нэмэхийн бүлэглэх хууль

$$ab = ba$$

үржихийн байр солих хууль

$$(ab)c = a(bc)$$

үржихийн бүлэглэх хууль

$$a + 0 = a \quad \text{ба} \quad a \cdot 1 = a$$

чанартай, хоёр «онцгой» 0, 1 тоо оршино. Орчин үеийн алгебрийн хувьд гэвэл ийм үзэл нэвт шингэжээ: алгебрын тооны ямар нэг (гэхдээ янз бүрийн) системийг судлах бөгөөд, тэдгээрийн хувьд нэмэх ба үржих хоёр үйлдэл тодорхойлогдсон ба эдгээр үйлдэл нь дээр

бүтсэн чанаруудыг хангахаас гадна бас уг системийн дурын a, b, c гурван тооны хувьд

$$(a+b)c = ac + bc$$

нээх хууль

гэсэн чанарыг нэмэх үйлдлийн хувь дахь үржих үйлдлийн хаалт нээх хууль хангана.

Тооны системд нэмэх үржих хоёр үйлдлийн хувьд харсаар байтал төсөө байна. Энэ нь нэмэх үйлдлийн чанар олон талаар үржих үйлдлийн чанарыг санагдуулдаг оршино.

Тухайлбал,

$$\frac{\text{нэмэх}}{\text{хасах}} = \frac{\text{үржих}}{?}$$

гэсэн ер бусын «пропорцод» тусгагджээ. Хэнээс ч асуухад энэ пропорц гэдэг нь юу гэсэн үг вэ? гэхэд нэг их бодолгүй асуултыг тэмдгийн оронд «хуваах» гэж бичдэг. Мөн сурагчид төдийгүй заримдаа эх эцэг ч «эсрэг тоо» (өгөгдсөн a тоон дээр нэмэхэд нийлбэр нь 0 гарах- a тоо) «урвуу тоо» (өгөгдсөн a тоог үржүүлэхэд үржвэр нь 1 гарах $\frac{1}{a}$ -тоо) гэсэн хоёр «томъёог» хугтаадаг.

Дээрх хоёр үйлдлийн төсөө нь мөн арифметикийн прогресс (аль ч зэрэгцээ хоёр тооны ялгавар нь нэгэн адил байх тооны цуваа) геометрийн прогресс (аль ч зэрэгцээ хоёр тооны ноогдвор нь нэгэвч адил байх тооны цуваа) хоёрын чанар төсөөтэй байдаг тусгагддаг.

Гэтэл энэ төсөө нь юм болгон дээр илрэх нь албагүй. Жишээ нь 0 тоо нэмэх үржих хоёр үйлдлийн алины нь ч хувьд онцгой үүрэгтэй. Ямар ч a тооны хувьд

$$a \cdot 0 = 0$$

байна (эндээс тухайлбал 0-ээс ялгаатай тоог 0-д хувааж болохгүй гэж гарна). Гэтэл сүүлийн тэнцэтгэлд Үржихийг нэмэхээр, тэгийг нэгээр соливол

52

$$a+1=1 \text{ гэсэн зөвхөн } a=0^1$$

үед л хүчинтэй байх утгагүй «тэнцэтгэлд» хүрч ирнэ. Цаашилбал $(a+b)c=ac+bc$ гэсэн хаалт нээх хуульд нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр соливол

$$ab+c=(a+c)(b+c)$$

гэсэн «тэнцэтгэлд» хүрэх бөгөөд мэдээж хэн ч үүнийг зөвшөөрөхгүй [учир нь, $(a+c)(b+c)=ab+ac+bc+c^2=ab+c(a+b+c)$ тул $(a+c)(b+c)=ab+c$ тэнцэтгэл нь зөвхөн $c=0$ буюу $a+c+b=1$ тохилдолд л биелнэ.]

Гэвч алгебрт тоон биш өөр системүүд байдаг. Тийм системд нэмэх, үржих үйлдлийг тодорхойлж болох бөгөөд тэдгээр нь харин ч хоорондоо тооны нэмэх ба үржих хоёр үйлдлээс ч илүү төсөөтэй байдаг. Тийм нэг чухал систем «олонлогуудын алгебрыг» авч үзье.

Ямарваа юмсын дурын цуглуулгыг олонлог гэж ойлгоё. Уг юмсыг олонлогийн *элемент* гэнэ. Жишээ нь «7 а ангич сурагчдын олонлог» «дугуйн цэгийн олонлог», «квадратын цэгүүдийн олонлог» «Менделеевийн үелэх системийн элементүүдийн олонлог», «тэгш тоонуудын олонлог», «Эзэтхэгийн заагуудын олонлог», «танай ангийнхны зохиол бичлэгт алдсан хэ.изүйн дүрмийн алдааны олонлог» гэх мэт.

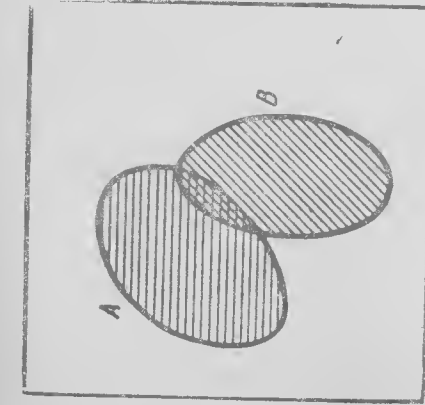
«Хоёр олонлогийг нэмэх»-ийг яаж тодорхойлох нь илэрхий юм.

A ба B олонлогийн нийлбэр $A+B$ гэж энэхүү хоёр олонлогийн нэгдлийг хэлнэ. Жишээ нь A нь танай ангийн хөвгүүдийн олонлог, B нь охидын олонлог бол $A+B$ нь танай ангийн нийт сурагчдын олонлог болно. Хэрэв A нь тэгш натурал тоонуудын олонлог, B нь 3-т хуваагдах натурал тоонуудын олонлог бол $A+B$ нь

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$$

Олонлог болно. Хэрэв A нь 7 дугаар зураг дээрх хэвтээ шугамаар зурааслагдсан дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог, B нь тэнхүү шугамаар зурааслагдсан дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог бол $A+B$ нь 7 ду-

¹ Хэрэв ямарваа a -гийн хувьд $a+1=1$ тэнцэтгэл хүчинтэй бол 1-ээс ялгаатай ямарч тооноос 1-нийг хасах бололцоогүй болно. Гэтэл энэ нь худал юм, учир нь $3-1=2$ байдаг шүү дээ.



7 дугаар зураг

гаар зураг дээрх бүх зурааслагдсан дүрс болно. Ямар ч A ба B олонлогийн хувьд

$$A + B = B + A$$

байх нь илэрхий (7 дугаар зургийг хар), өөрөөр хэлбэл олонлогуудын нэмэх үйлдлийн хувьд байр солих (коммутатив) хууль биелнэ. Цаашилбал ямарч A, B, C олонлогийн хувьд ямагт

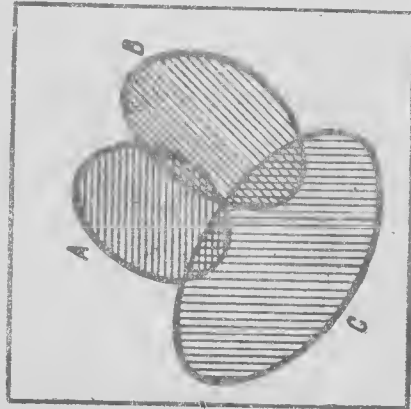
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

биелнэ. Өөрөөр хэлбэл олонлогийн нэмэх үйлдлийн хувьд бүлэглэх (ассоциатив) хууль биелнэ. $(A + B) + C$ (эсвэл $A + (B + C)$) олонлогийг зүгээр л $A + B + C$ гэж тэмдэглэж болно. Энэ нь A, B, C гэсэн гурван олонлогийн нэгдлийг дүрслэнэ (8 дугаар зураг дээр $A + B + C$ олонлог нь бүх зурааслагдсан дүрстэй давхцана)

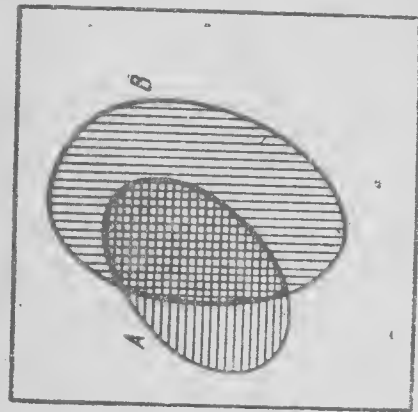
A, B хоёр олонлогийн ерөнхий хэсэг буюу огтлолцлыг энэ хоёр олонлогийн үржвэр AB гэж нэрлэе.

Жишээ нь A нь танай ангийн шатарчдын олонлог, B нь усанд сэлэгчдийн олонлог бол

AB нь танай ангийн усанд сэлж чаддаг шатарчдын олонлог болно. A нь тэгш тоонуудын олонлог B нь 3-т хуваагдах натурал тоонуудын олонлог бол AB нь $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$ гэсэн 6-д хуваагдах тоонуудаас тогтох олонлог болно.



8 дугаар зураг



9 дүгээр зураг

A нь 9 дүгээр зураг дээрх хэвтээ шугамаар зурааслагдсан муж, B нь босоо шугамаар зурааслагдсан муж ба AB мөн. зураг дээрх хэвтээ ба босоо шугамаар зурааслагдсан «торыг» цэгүүдээс тогтох олонлог болно.

Олонлогийн үржих үйлдлийн хувьд байр солих хууль биелэх нь илэрхий, өөрөөр хэлбэл ямарваа A, B олонлогийн хувьд

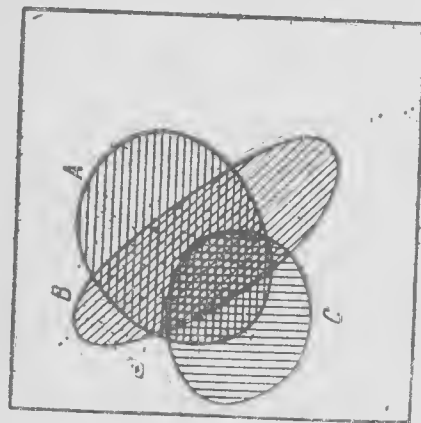
$$AB = BA$$

байна (9 дүгээр зураг үз). « AB нь сэлж чаддаг шатарчдын олонлог» ба « BA нь шатар тоглож чаддаг сэлэгчдийн олонлог» бол энэ хоёр нэгэн адил олонлог байх нь илэрхий. Цаашилбал олонлогуудын үржих үйлдлийн хувьд бүлэглэх хууль, өөрөөр хэлбэл ямарч A, B, C гурван олонлогийн хувьд

$$(AB)C = A(BC)$$

биелэх нь илэрхий (AB) C эсвэл A (BC) олонлогийг хялтуугээр зүгээр л ABC гэж тэмдэглэнэ. Энэ нь A, B, C гурван олонлогийн ерөнхий хэсэг буюу огтлолцлыг дүрсэлнэ (10 дугаар зураг дээр ABC нь гурвалсан зураастай муж юм).

Ямарч A, B, C гурван олонлогийн хувьд $(A + B)C = AC + BC$ хаалт нээх хууль бас биелдэг нь гайхалтай юм. Үнэндээ A -нь танай ангийн шатарчдын олонлог B нь даамчдын олонлог, C нь усанд сэлэгчдийн олонлог бол $A + B$ нь шатарчид буюу даамчдын олон-



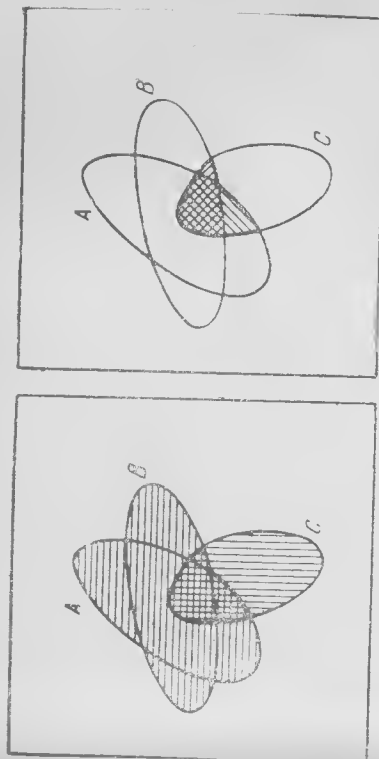
10 дугаар зураг

лог өөрөөр хэлбэл шатар даам хоёрын ядаж нэгийг нь тоглож чаддаг сурагчдын олонлог (шатар ба даамыг хоёулангйг нь тоглодог ч байж болно). $(A+B)$ C ийг $A+B$ олонлогт буй сэлж чаддаг сурагчдын олонлог. Гэтэл AC гэсэн сэлж чаддаг шатарчдын олонлог BC гэсэн сэлж чаддаг даамчдын олонлогоос $AC+B$ гэсэн нийлбэр зохиовол мөн дээрх $(A+B)$ C олонлог гарна.

Хаалт нээх хуулийг ингэж үгээр тайлбарлах нь чамд цусэр юм шиг санагдаж болно. Тийм үед график зуралзлыг ашиглах нь ашигтай. 11 дүгээр зургийн а) $A+B$ олонлог нь хэвтээ шугамаар зурааслагджээ, харин C нь босоо шугамаар, тэгвэл $(A+B)$ C олонлог нь «торон» шугамаар бүрхэгдсэн олонлог болно. 11б) AC ба BC хоёр олонлог харгалзан баруун ба зүүн тийш ташсан налуу шугамаар зурааслагдсан хэсэг. Энэ үед $AC+BC$ нь энэ зураг дээрх бүх зураасласа дүрстэй давхцана. 11 дүгээр зургийн б) дээрх AC BC дүрс нь 11 дүгээр зургийн а) дээрх давхар зураас тай $(A+B)$ C дүрсээс ялгагдахгүй.

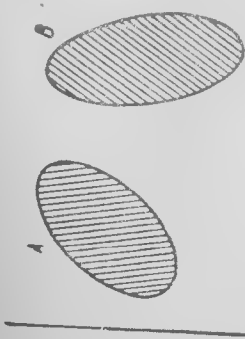
Ямар «олонлог» манай «олонлогийн алгебрт» тэгийг үүрэг гүйцэтгэхийг хялбархан харж болно. Ямарч олонлог дээр тийм олонлог O -ийг нэмэхэд («тэг олонлогийг» тэг тооны бичлэг 0 -тэй төсөөтэйгээр O гэж тэмдэглэдэг.

¹ Хоосон олонлогийг ер нь \emptyset гэж тэмдэглэдэг. Хэв рел.



11 дүгээр зураг

дэглэх болно) тэр олонлогийг өөрчлөхгүй байхын тулд O олонлог нь нэг ч элементийг агуулаагүй «хоосон» байна гэсэн үг. Хэрэв O олонлог нь элемент агуулахгүй бол энэ нь дэмий юм, түүний тухай юу ч ярих хэрэггүй! Түүнийг авч үзэхгүй байж болмоор санагдаж болно. Гэтэл тэгж үзэж болно гэжүү, тэгийг тооны олонлогоос хасаж болно гэж үү? Хэрэв O тоо байгаагүй бол нэг тоог нөгөөгөөс нь хасаж чадахгүйсэн (учир нь тэр үед $3-3$ ялгавар нь юутай ч тэнцэхгүйсэн) мөн тоог тухайлбал 108-г аравтын системд бичихэд их бэрхшээлтэй (нэг зуут, найман нэгж, харин аравт огт байхгүй) байна. Энэчлэн олон зүйлийг бид хийж чадахгүйд хүрнэ. Тэг гарч ирсэн явдлыг бүх л арифметикийн түүхэн дахь хамгийн гайхамшигт үйл явдал гэж үздэг. Яг үүний адилаар хоосон олонлогийг олонлог гэж тооцохгүй бол хоёр олонлогийн үржвэрийг (огтлолцлыг) олж чадахгүй. Жишээ нь 12 дугаар зураг дээрх A, B хоёр олонлогийн огтлолцол хоосон. Мөн танай ангийн онцчуудын олонлог ба заануудын олонлогийн огтлолцол хоосон байна. «Хоосон олонлог» гэсэн ухагдахуураас татгалзвал бид олонлогийн тухай маш болгоомжтойгоор ярих хэрэгтэй болно. «Хотын 6 дугаар сургуулийн 5 дугаар ангийн 25 настай сурагчдын олонлог «хоосон, өөрөөр хэлбэл тийм олонлог огтлолцохгүй болоход хүрнэ.



12 дугаар зураг

олонлогийн огтолцол хоосон гэхэд болно.

Харин «нэгж олонлог I » гэж ярихад нэлээд төвөгтэй. Энэ олонлог I -ийг (1 тооны бичлэгтэй төсөөтэйгээр I гэж тэмдэглэв). Дурын A олонлогоор үржүүлэхэд A олонлог гарах ёстой тул I олонлог нь ямарч A олонлогийн бүх элементийг агуулах ёстой. Элементүүд нь ямар нэг тодорхой юмсыг нээцэд «элементүүд нь байх» авагдах тийм A олонлогуудыг л авч үзвэл нэгж олонлог ошчих болх нь илэрхий. Нэг тодорхой сургуулийг юмуу эгнээ сурэгчдийн олонлогийн хувьд ярихад A нь онцгуудын олонлог, B нь шатарчдын олонлогийг зааж байж болно. Мөн натурал тоогоор хязгаарлахад A нь тэгш тоочуудын B нь энгийн тоонуудын олонлог гэх юмуу 7, 12 дугаар зургууд дээрх квадратуудын доторхи тодорхой дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог гэж ярьж болно. Энэ үед бидний авч үзэж буй «юмсыг» агуулсан хамгийг том олонлогийг I гэж ойлгоно. Тэр нь авч үзэж буй сургуулийн юмуу ангийн бүх сурагчдын олонлог, эсвэл бүх натурал тооны олонлог эсвэл кватратын бүх цэгийг олонлог (13 дугаар зураг). Энэ I олонлогийг «олонлогийн алгебрт» нэгж олонлог эсвэл универсал олонлог гэдэг. Ингээд ямарч «бага» A олонлогийн хувьд A нь мөн I -тэй давхцаж болно).

$$AI = I$$

болно.

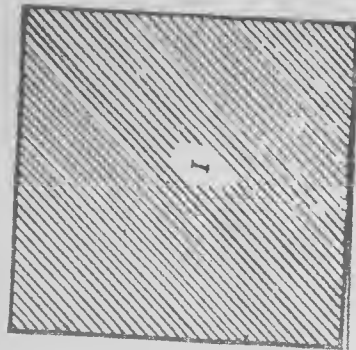
Хэрэв O нь хоосон олонлог бол ямарваа A олонлогийн хувьд

$$A + O = A$$

Мөн ямарваа A олонлогийн хувьд, ямагт

$$AO = O$$

байна. Танай ангийн охины олонлог ба 2,5 м-ээс илүү өндөр сурагчдын олонлогийн хувьд, ямагт



13 дугаар зураг

$$A + I = I$$

Үнэндээ тодорхойлолт ёсоор I нь «хамгийн том» олонлог тул түүнийг цааш ихэсгэх боломжгүй. A олонлог ямар бийлаач түүний цэгж I олонлог дээр нэмэхэд I олонлог өөрөө л гарна.

Цашилбал

$$(a + b)c = ac + bc$$

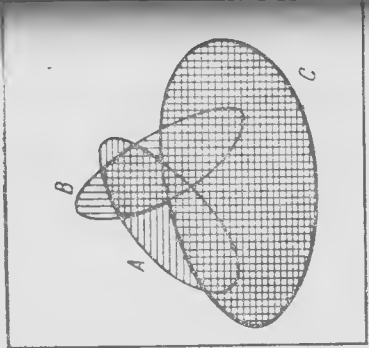
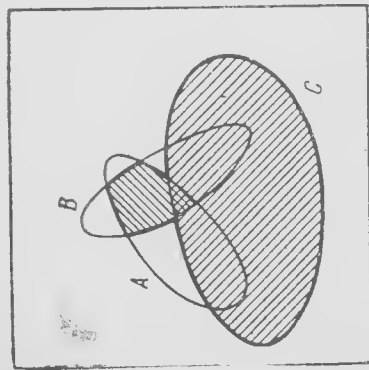
хаалт нээх хуульд нийлбэрийг үржвэрээр, үржвэрийг нийлбэрээр соливол $ab + c = (a + c)(b + c)$ гэсэн тооны хувьд бараг ихэнх тохиолд хүчингүй байх утгатай тэнцгэлд хүрнэ. Гэтэл олонлогийн алгебрт ийм биш: ямарваа A, B, C гурван олонлогийн хувьд

$$AB + C = (A + C)(B + C)$$

гэсэн хаалт нээх хоёрдугаар хуулийг (нэмэх үйлдлийн үржих үйлдэлд хаалт нээх хууль) илэрхийлсэн тэнцгэл хүчинтэй байна. Үнэндээ A -шатарчдын, B -даамчдын, C -усанд сэлэгчдийн (танай ангийн) олонлог бол AB нь шатар, даам хоёр тоглодог сурагчдын олонлог, $AB + C$ нь шатар ба даам хоёрын хоёуланг тоглодог сурагчид буюу сэлж чаддаг сурагчдаас тогтох олонлог болно. $A + C$ нь шатарч буюу сэлэгчдээс, $B + C$ нь даамч буюу сэлэгчдээс тогтох олонлог тул $(A + C)(B + C)$ нь сэлэгч буюу эсвэл шатар даам хоёрыг хоёу-

ланг тоглодог сурагчдаас тогтох олонлог болно, өөрөөр хэлбэл $AB + C$ олонлогтой давхцав.

Хаалт нээх хоёрдугаар хуулийг үгээр ингэж тайлбарлах будлиантай юм шиг санагдаж болох тул түүний график зураглалаар тайлбарлая. 14 а дүгээр зураг дээр AB олонлог нь баруун тийш налсан шугамаар C нь зүүн тийш налсан шугамаар зурааслагджээ. Тэгвэл энэ зураг дээрх бүх зурааслагдсан дүрс нь $AB+C$ олонлогийг дүрслэнэ. 14 б дүгээр зураг дээр $A+C$ нь хэвт шугамаар $B+C$ нь босоо шугамаар зурааслагджээ. Тэгвэл энэ зураг дээр «торлогдсон» дүрс нь $(A+C)$



6)

(a)

14 дүгээр зураг

(B+C) олонлог болно. Гэтэл энэ дүрс нь 14 а зур дээрх бүх зурааслагдсан дүрсгэй давхцах нь шууд харагдаж байна, үүгээр хаалт нээх хоёрдугаар хууль батлагдав.

Дунд сургуульд үздэг ердийн алгебр биелдэг олонлогийн алгебрийн 2 хуулийг эцэст нь авч үзье. нь ямарч олонлог байлаа гэсэн энэ олонлогийг өөрчлөх нь өөртэй нь нийлүүлсэн нэгдэл ба мөн өөрийг нь өөрчлөх нь огтлолцуулсан огтлолцоо өөртэй нь л дахцана.

$$A + A = A \quad \text{6a} \quad AA = A$$

байх нь илэрхий. Энэ хоёр тэнцэтгэлийг заримдаа *идемпотент* хувь гэж нэрлэдэг.

60

Энэ бүрийн тоонуудад алгебрийн ерөнхий хуулиуд
наг нь тун таатай хэрэг: үүний ачаар л бүхэл тоо-
ны бутархайд шилжихдээ урьд мэдэж байсан зүйл-
ээрээ юм нэмж л сурч байснаас биш цоо шинээр су-
нгах хэрэггүй байлаа. Харин тооноос олонлогт шил-
хэхэд байдал өөр болж байна. Тоолы алгебраас олон-
гийн алгебрт шилжихэд олонлогийн алгебрийн шинэ
хүч, гарч ирдэг тул түүнийг шинээр сурах хэрэг гар-
на.

Эдгээр шинэ хуулиудыг дурьдвал:

A+I-I

ний нэгж олонлог I -ийн 1 тооноос эрс ялгаатай тоо
орхойлох хууль

$$(A + C)(B + C) = AB + C$$

н олонлогийн алгебрт хаалт нээх хоёрдугаар маш
 өрмөц хууль. Эгэ хуулиас $(A + D)(B + D)(C + D) =$
 $(AB + D)(C + D) = (AB + D)(C + D) = (AB)C + D =$
 $ABC + D$ гэж гарч байна. Цаашид бал идемпотент
 алгас үндэслэл олонлогийн алгебрт зэргийн илт-
 гч ба коэффициентт байхгүйг харж болно. Үнэн-
 А ба n нь ямарч байсан.

1 Чухамхүү энэ ялгаа нь олонлогийн нэмэх ба үржих (нэгдэл, ололт) үйлдлийг ихэнх номуудад U ба P тэмдгээр тэмдэглэх тушаал болдог. Энэ номонд бид өөр алгебрийн системийг үзнэ, үүний «нэмэх» ба «үржих» үйлдэл олонлогийн алсбэр дахь хуульчиг ашиг байх болно, чухам иймээс бид зөвхөн олонлогийн онолд үйлддэг U , P тэмдгүүдээс ангирах хэрэгтэй болов. Нөгөө талаар авч үзэж буй алгебрууд нь сургуульд судалдаг алсбэртэй үүний байдгийг нь харгазан нэмэх үржихийн бидний мэдэх тэмдгээр хэрэглэх болов. Олонлогийн онолын хуулиудыг түүний тэмдгээр бичвэл:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{6a} \quad A \cap B = B \cap A$$

байр солих хуулнуд

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

бүлэглэх хуулиуд

$$AUO = A \quad 6a \quad A \cap J = A$$

$$AUJ = J \quad \delta a \quad A \cap O = 0$$

тэг олонлог О ба нэгж олонлог 1-ийн чанарууд

$$111B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ ба } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

хаалт нээх хуулиуд

$$AUA=A \text{ ба } A\cap A=A$$

демпотент хуулиул

$$\underbrace{A + A + \dots + A}_n = A \text{ ба } A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A$$

байна. Үүнээс: $(A + B)(B + C)(C + A) = ABC + AAB + ACC + AAC + BVC + ABV + BCC + ABC = (ABC + ABC) + (AB + AB) + (AC + AC) + (BC + BC) = ABC + AB + AC + BC$

(Доорхи 6 дугаар дасгалтай жиш).

Дасгал

Дараахь тэнцлүүдийг батал. Хоосон олонлогийн ямагт O , нэгж олонлогийг I -ээр тэмдэглэнэ.

- $(A + B)(A + C)(B + D)(C + D) = AD + BC$
- $A(A + B) = A$
- $AB + A = A$
- $A(A + C)(B + C) = AB + AC$
- $A(A + 1)(B + O) = AB$
- $(A + B)(B + C)(C + A) = AB + BC + AC$
- $(A + B)(B + C)(C + D) = AC + BC + BD$
- $(A + B)(A + 1) + (A + B)(B + O) = A + B$
- $(A + B)(B + 1)(A + O) = A$
- $(A + B + C)(B + C + D)(C + D + A) = AB + AD + BD + C$

Жишээ нь: $A(A + C)(B + C) = A[(A + C)(B + C)]$

$$= A \underbrace{(AB + C)}_{\substack{\text{үржвэрийн} \\ \text{бүлэглэх} \\ \text{хууль}}} = \underbrace{A(A + C)}_{\substack{\text{хаалт} \\ \text{нээх} \\ \text{II хууль}}} \underbrace{(B + C)}_{\substack{\text{үржвэрийн} \\ \text{байр солих} \\ \text{хууль}}}$$

$$= (AB)A + CA = (AA)B + AC = AB + AC.$$

$$\underbrace{(AB)A + CA}_{\substack{\text{үржвэрийн} \\ \text{байр солих} \\ \text{ба бүлэглэх} \\ \text{хууль}}} = \underbrace{(AA)B + AC}_{\substack{\text{үржвэрийн} \\ \text{идемпотент} \\ \text{хууль}}}$$

2 §. Булийн алгебр

Олонлогийн алгебрийн өөрсдийн мэдэх бүх хулиудыг цуглуулан бичээл

$$A + B = B + A \text{ ба } AB = BA$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ ба } (AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC \text{ ба } AB + C = (A + C)(B + C)$$

$$A + \underbrace{A}_{\substack{\text{хаалт нээх} \\ \text{хуулиуд}}} = A \text{ ба } \underbrace{AA}_{\substack{\text{идемпотент} \\ \text{хуулиуд}}} = A$$

Түүнээс гадна, олонлогийн алгебрт O ба I гэсэн хоёр «оншгой» элемент (олонлог) бий:

$$A + O = A \text{ ба } AI = A$$

$$A + I = I \text{ ба } AO = O$$

Энэ хуулиуд (үйлдлийн дүрмүүд) нь тооны алгебрийн бидний мэдэх хуулиудтай төстэй боловч яг ижил биш. Олонлогийн алгебр нь бас л «алгебр», гэвч бидний урьд мэдэх алгебр биш, шинэ ер бусын алгебр юм.

Гэтэл ердийн тоон алгебр нь нэг биш олон «алгебр» юм: «натурал тоонуудын алгебр», «рационал тоонуудын алгебр», «бодит тооны алгебр» эсвэл «комплекс тооны алгебр» гэх мэт. Энэ бүх алгебр нь тоонуудаараа, мөн үйлдлүүдийн (нэмэх ба үржүүлэх) тодорхойлолтоороо ялгаатай байна. Гэвч үйлдлийн үндсэн чанарууд бүх тохиолдолд нэгэн адил байна.

Үүнтэй уялдан олонлогийн алгебрт мөн ийм байх болов уу гэсэн асуулт зүй ёсоор гарна. Өөрөөр хэлбэл ганцхан олонлогийн алгебр байх уу? эсвэл үйлдэл үүсгэтгэх элемент ба үйлдлийн тодорхойлолтоороо ялгагдах боловч эдгээр үйлдлийн чанар нь адилхан байх олон алгебр орших уу?

Олонлогийн алгебртэй адилхан (олонлогийн алгебрийн хуулиуд биелдэг) алгебр маш олон байна гэдгийг чин тааж байх болно. Энэ нь үнэндээ тийм юм, олонлогийн алгебр нь өөрөө маш олон янз юм: «танайнгийн сурагчдын олонлогийн алгебр» «москвыгийн амьтны хүрээлэн дахь араатнуудын олонлогийн алгебр», «квадратын цэгүүдийн олонлогийн алгебр» (7—14 дүгээр зураг хар) «сургуулийн номын сан дахь номуудын олонлогийн алгебр» эсвэл «тэнгэрийн ондуудын олонлогийн алгебр». Гэвч үүнтэй төстэй чанаруудтай бүр өөр маягийн алгебр оршин байдаг. Тэднээс хэдийг үрдая. Доорхи жишээнүүдийг авч үзэхийн өмнө ч,

дараахь зүйлийг сайн эзэмшсэн байх ёстой. Тэр нь a , b ... юмсын (элементүүдийн) ямар нэг олонлог дээр нэмэх ба үржих үйлдлийг тодорхойлох гэсэн асуудал юм. Энэ нь дурын хоёр a , b юмст тэдгээрийн нийлбэр ба үржвэр гэгдэх c ба d юмсыг харгалзуулагд дүрмийг зааж өгнө гэсэн үг.

$$c = a + b, \quad d = ab$$

Олонлогийн алгебрийг тодорхойлдог үйлдлийн бүх хуулиуд биелэгдэж байхаар энэ дүрмүүдийг сонгож авна. Ямар учраас a ба b -ийн нийлбэр c -тэй тэнцүү вэ? гэж асуух эрх чамд байхгүй $a + b$ нийлбэрийг бид яг энэ c гэж тодорхойлно, тэгвэл тодорхойлолтын тухай хэн ч маргадаггүй шүүдээ. Заримдаа манай тодорхойлолтууд чамд аймшигтай юм шиг санагдаж болно. Энэ ч аргагүй, шинэ дасаагүй юм бүхэн аймшигтай санагдадаг, тэгвэл энэ тодорхойлолтууд чиний хувьд шилдэг зүйл шүү дээ. Телевизор телефон мэтийн гайхамшигт юмст одоо ч гайхахгүй шүү дээ, учир нь ча тэдэнд аль хэдийнээ дассан. Харин a ба b натурал тооны нийлбэр гэдэг нь a юмстай олонлог ба b юмстай B олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоо, ab үржвэр гэдэг тус бүр нь b юмстай a ширхэг олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоо гэдгийг хатуу ойлгосон 2 юмуу 3 дугаар ангийн сурагчдад $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ бутархайнуудын нийлбэр ба үржвэр нь

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

гэж тодорхойлогддог болохыг тайлбарлахад тэдэнд аймшигтай санагдаж болно.

Манай жишээнүүд:

Жишээ 1. Хоёр тооны алгебр

Манай алгебрт зөвхөн хоёр элемент байна, тэднийг тоо гэж нэрлээд 0 ба 1 гэж тэмдэглэе (энд энэ тэмдгүүд нь тас өөр утгатай). Энэ тоонуудын үржвэрийг, ердийн арифметикт тодорхойлдог шиг дараахь «үржвэрийн хүрдээр» тодорхойлъя.

$$\begin{array}{r} \cdot \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Харин нэмэхийг «бараг ердийнхөөр», зөвхөн $1+1$ нийлбэр нь одоо 2-той (манай «хоёр тооны алгебрт» тийм ч байхгүй шүү дээ) тэнцүү биш харин 1 гэж тодорхойлъя.

$$\begin{array}{r} + \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Ингэж тодорхойлогдсон алгебрт байр солих хоёр хууль хоёул биелнэ.

дурын a , b -ийн хувьд

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

мөн дурын a , b , c элементийн хувьд

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{ба} \quad (ab)c = a(bc)$$

гэсэн бүлэглэх хууль биелэхийг хялбархан шалгаж болно. Энд үржвэрийн хувьд шалгахгүй байж ч болно, учир нь шинэ үржвэр нь бидний мэдэх үржвэртэй давхцж байна.

(Дурын a -ийн хувьд

$$a + a = a \quad \text{ба} \quad aa = a$$

гэсэн идемпотент хуулиудыг шалгаж болно. $(1 + 1) = 1$ гэж авсан шүү дээ).

Харин хаалт нээх хуулиудыг шалгахад жаахан төвөгтэй:

$$(1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ба} \quad (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 1$$

$$(1 \cdot 1) + 1 = 1 + 1 = 1 \quad \text{ба} \quad (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Эцэст нь манай алгебрийн 0 элементийн үүргийг 0 тоо, 1 элементийн үүргийг 1 тоо гүйцэтгэнэ гэж үзвэл «хоёр» элемент 0 ба 1-д харгалзах дүрмүүд биелнэ.

$$(a = 0 \text{ ба } a = 1 \text{ үед}) \quad a + 1 = 1 \text{ ба } a \cdot 0 = 0$$

Жишээ 2. Дөрвөн тооны алгебр
Энэ нь 1 дүгээр жишээний төрлийн нэлээд төвөгтэй жишээ юм. Алгебрийн элементүүд нь 0 ба 1 цифр ба p ба q хоёр үсгээр тэмдэглэгдсэн 4 «тоо» байна гэе. Авч үзэж буй алгебрд нэмэх ба үржих үйлдлийг дараахь хүснэгтээр тодорхойлно.

	+ 0 p q 1					· 0 p q 1			
0	0	0	p	q	1	0	0	0	0
p	p	p	1	1	1	p	0	p	0
q	q	1	q	1	1	q	0	0	q
1	1	1	1	1	1	1	0	p	q

Шууд шалгах замаар дурын a, b, c элементийн хувьд:

$$a + b = b + a, ab = ba, a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(ab)c = a(bc), (a + b)c = ac + bc, ab + c = (a + c)(b + c);$$

$$a + a = a, aa = a$$

болохыг харж болно.
Түүнээс гадна олонлогийн алгебрийн O ба J элементүүдийн үүргийг 0 ба 1 тоонууд гүйцэтгэж байна, учир нь дурын a элементийн хувьд

$$a + 0 = a \text{ ба } a \cdot 1 = a, a + 1 = 1 \text{ ба } a \cdot 0 = 0$$

Жишээ 3. Максимум ба минимумын (хамгийн их ба бага утгын, алгебр

Тооны ямар нэг (зааглагдсан) олонлог, жишээлбэл $0 \leq x \leq 1$ байх x -тоонуудын (бүгдийг нь ч авч болно) олонлогийг алгебрынхаа элементүүд болгоё. Эдгээр тооны (элементийн) нэмэх, үржих үйлдлийг цоо шинэ аргаар тодорхойлъя. Энэ үйлдлээ ердийн нэмэх ба үржих үйлдэлтэй хутгахгүйн тулд \oplus нэмэх ба \odot үржих тэмдгүүдээр тэмдэглэе. x, y тооны нийлбэр гэж $x \oplus y$ нь энэ хоёр тооны аль ихийг нь тэнцүү ($x = y$ бол аль нь ч байж болно.) x ба y тооны үржвэр $x \odot y$ нь энэ хоёр тооны аль багатай нь тэнцүү ($x = y$ бол аль нь ч байж болно).

Гухайлбал $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ тоонууд манай алгебрын элемент болж байвал эдгээр тооны хувьд нэмэх үржих үйлдлийн «таблиц» нь:

	+ 0 1/3 1/2 2/3 1						· 0 1/3 1/2 2/3 1				
0	0	1/3	1/2	2/3	1	0	0	0	0	0	0
1/3	1/3	1/3	1/2	2/3	1	1/3	0	1/3	1/2	2/3	1
1/2	1/2	1/2	1/2	2/3	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1
2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Математикт u, v, \dots, z тоонуудын хамгийн ихийг $\max[u, v, \dots, z]$ шахим-хамгийн их гэсэн латин үгээр илэрхийлэн тэмдэглэдэг, харин энэ тоонуудын хамгийн багзыг $\min[u, v, \dots, z]$ (миним-хамгийн бага) латин үгээр тэмдэглэдэг. Ийнхүү манай алгебр тодорхойлолт ёсоор

$$x \oplus y = \max[x, y] \text{ ба } x \odot y = \min[x, y]$$

Тоонуудаа бас тоон шулууны цэгүүдээр тэмдэглэж болно, тэгвэл $0 \leq x \leq 1$ байх x тоонууд нь 1 ургтай нэгэ хэрчмийн цэгүүдээр дүрслэгдэнэ. Харин x, y



15 дугаар зураг.

1 шах $[u, v, \dots, z]$ ба $\min[u, v, \dots, z]$ -үүдийг харгалзан u, \dots, z -ийн хамгийн их» ба « u, v, \dots, z -ийн хамгийн бага» үүшнэ.

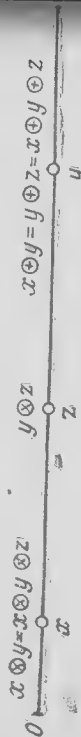
тооны нийлбэр $x \oplus y$ нь x ба y цэгийн баруунаар, үржвэр $x \otimes y$ нь зүүнээр дүгслэгдэнэ (15 дугаар зураг). Бидний шинээр тодорхойлсон нэмэх, үржих хоёр үйлдэл нь байр солих хуулийг хангах нь ойлгомжтой бизээ.

$$x \oplus y = y \oplus x \text{ ба } x \otimes y = y \otimes x$$

Бас бүлэглэх хуулиуд биелэх нь илт:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \text{ ба } (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

учир нь $(x \oplus y) \oplus z$ буюу $x \oplus (y \oplus z)$ тоо нь $\max\{x, z\}$ (түүнийг $x \oplus y \oplus z$ гэж бичиж байя), харин $(x \otimes y) \otimes z$ буюу $x \otimes (y \otimes z)$ тоо нь $\min\{x, y, z\}$ (мөн үүнийг $x \otimes y \otimes z$ гэж бичиж байя) билээ. (16 дугаар зураг).



16 дугаар зураг.

Идемпотент хуулиуд биелэх нь илэрхий:

$$x \oplus x = \max\{x, x\} = x \text{ ба } x \otimes x = \min\{x, x\} = x$$

Эцэст нь хаалт нээх хуулиудыг шалгая:

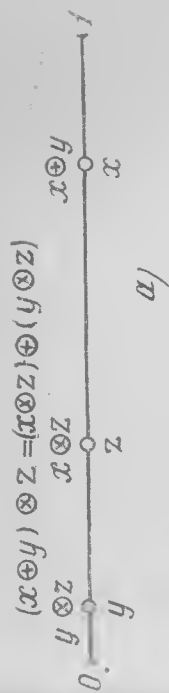
$$(x + y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

$$(x \otimes y) \oplus z = (x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$$

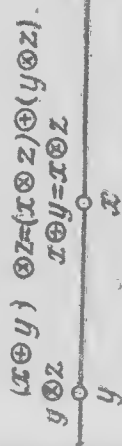
$$(x \oplus y) \otimes z = \min\{\max\{x, y\}, z\}$$

тоо нь хэрэв x ба y тооны ядаж нэг нь z тооноос бол z -тэй тэнцүү, хэрэв x ба y нь хоёул z -ээс бага бол энэ хоёрын аль ихтэй нь тэнцүү юм (Зураг 13 а). Гэтэл яг энэ тоотой $(x \otimes z) \oplus (y \otimes z) = \max\{\min\{x, z\}, \min\{y, z\}\}$ тоо тэнцүү юм (17 дугаар зураг). Яг үүний адил $(x \otimes y) \oplus z = \max\{\min\{x, y\}, z\}$ тоо нь хэрэв x ба y тооноос ядаж нэг нь z -ээс бага бол z -тэй тэнцүү, хэрэв хоёулаа z -ээс их бол x ба y -ийн аль багатай нь тэнцүү (Зураг 14 а, б).

Гэтэл $(x \oplus z) \otimes (y \oplus z) = \min\{\max\{x, z\}, \max\{y, z\}\}$ тоо нь яг энэ тоотой тэнцүү (18 дугаар зураг).



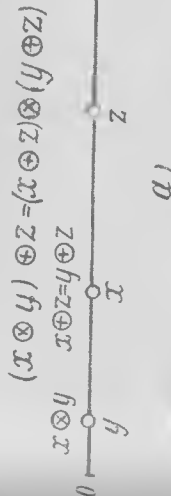
а)



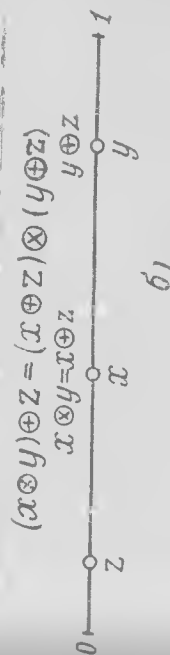
б)

17 дугаар зураг

Гэвэл одоо манай энэхүү өвөрмөц алгебрт олонлогийн алгебрийн бүх хууль биелнэ гэдэгт үнэмшихийн үүднээс олонлогийн алгебрийн 0 ба 1 элементүүдийн үүргийг, бидний авч үзэж буй тоонуудын хамгийн бага нь болох 0 ба хамгийн их нь болох 1 гүйцэтгэнэ гэдгийг



а)



б)

18 дугаар зураг.

Эцэглэхэд хангалттай. Үнэндээ $0 \leq x \leq 1$ байх ямар ч тооны хувьд:

$$x \oplus 0 = \max\{x, 0\} = x \text{ ба } x \otimes 1 = \min\{x, 1\} = x$$

$$x \oplus 1 = \max\{x, 1\} = 1 \text{ ба } x \otimes 0 = \min\{x, 0\} = 0$$

Жишээ 4. Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн хуваагчийн алгебр

Дурын натурал тоог N гэе. Манай шинэ алгебры элементүүд болгож N тооны бүх хуваагчдыг авч Жишээ нь $N=210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ байвал манай алгебрын элементүүд нь 1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210 болно.

Эдгээр тооны нэмэх үржих үйлдлийг бүр цоо ш нээр тодорхойлъя. m, n хоёр тооны нийлбэр $m \oplus n$ гэж эдгээрийн хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч (давталтыг) өөрөөр хэлбэл m, n хоёр тус бүрд хуваагдах хамгийн бага натурал тоог харин m, n хоёр тооны үржвэр $m \otimes n$ гэж эдгээрийн хамгийн их ерөнхий хуваагчийг тодруулбал m -ийг r n -ийг g хуваадаг хамгийн их натурал тоог хэлнэ. Жишээ нь $N=6$ бол манай алгебр 1, 2, 3 ба 6 тоонуудыг агуулна, эдгээрийн нэмэх, үржих үйлдлийн таблиц:

\oplus	1	2	3	6	\otimes	1	2	3	6
1	1	2	3	6	1	1	1	1	1
2	2	2	6	6	2	1	2	1	2
3	3	6	3	6	3	1	1	3	3
6	6	6	6	6	6	1	2	3	6

"Дээд арифметикт" (тооны онол) m, n, \dots, S тоонуудын хамгийн бага ерөнхий давталтыг $[m, n, \dots, S]$ ба хамгийн их ерөнхий хуваагчийг (m, n, \dots, S) гэж тэмдэглэдэг. Тэгвэл тодорхойлолт ёсоор манай алгебры $m \oplus n = [m, n]$ ба $m \otimes n = (m, n)$

Жишээ нь 10 ба 15-ийг алгебр агуулдаг бол $10 \oplus 15 = [10, 15] = 30$ ба $10 \otimes 15 = (10, 15) = 5$

Манай алгебрт ямагт $m \oplus n = n \oplus m$ ба $m \otimes n = n \otimes m$ байна.

Цаашилбал $(m \oplus n) \oplus p = m \oplus (n \oplus p)$ ($= [m, n, p]$) (энэ тоог $m \oplus n \oplus p$ гэж тэмдэглэж байя). ба $(m \otimes n) \otimes p = m \otimes n \otimes p$ ($= (m, n, p)$) (энэ тоог $m \otimes n \otimes p$ гэж тэмдэглэж байя).

Идемпотент хуулиуд бас илэрхий:

$$m \oplus m = [m, m] = m \text{ ба } m \otimes m = (m, m) = m$$

Хаалт нээх хуулийг шалгахад л жаахан төвөгтэй

$$(m \oplus n) \otimes p = ([m, n], p)$$

гоо нь m, n тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч ба p тооны хамгийн их ерөнхий хуваагч билээ. (үүнийг сайн бодоорой). Энэ тоо нь m ба n тооны аль нэгийг нь задаргаанд ордог p тооны задаргааны үржигдхүүнүүдийг л агуулна. Гэтэл эдгээр анхны үржигдхүүнүүд нь

$$(m \otimes p) \oplus (n \otimes p) = [(m, p), (n, p)]$$

тооны задаргаанд орох тул

$$(m \oplus n) \otimes p = (m \otimes p) \oplus (n \otimes p)$$

болно. Тухайлбал 210 тооны хуваагчаас авбал

$$(10 \oplus 14) \otimes 105 = ([10, 14], 105) = (70, 105) = 35 \text{ ба } (10 \otimes 105) \oplus (14 \otimes 105) = [(10, 105), (14, 105)] = [5, 7] = 35$$

Үүний адилаар $(m \otimes n) \oplus p = [(m, n), p]$ тоо нь m, n тооны хамгийн их ерөнхий хуваагч ба p тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч билээ, энэ тоо нь эсвэл p -д ордог эсвэл m ба n -д ордог зөвхөн тийм анхны үржигдхүүнүүдийг л агуулна. Гэтэл яг энэ үржигдхүүнийг

$$(m \oplus n) \otimes (n \otimes p) = ([m, n], [n, p])$$

гоо агуулна, ниймд ямагт

$$(m \otimes n) \oplus p = (m \oplus n) \otimes (n \oplus p)$$

байна.

$$\begin{aligned} \text{Жишээ нь: } (10 \otimes 14) \oplus 15 &= ([10, 14], 105) = [2, 105] = 210 \text{ ба } (10 \oplus 105) \otimes (14 \otimes 105) = ([10, 105], [14, 105]) = \\ &= (210, 210) = 210 \end{aligned}$$

Эцэст нь олохлогийн эцэ алгебрийн 0 ба 1 элементүүдийн үүргийг өмнөх тоонуудын хамгийн бага нь болох 1 ба хамгийн их нь болох N гүйцэтгэж байна. Үүндээ

$$\begin{aligned} m \oplus 1 &= [m, 1] = m \text{ ба } m \otimes N = (m, N) = m \\ m \oplus N &= [m, N] = N \text{ ба } m \otimes 1 = (m, 1) = 1 \end{aligned}$$

онгөлөх нь илт (манай алгебрт N тооны л хуваагчид орохыг бүү март).

Ийнхүү энд олонлогийн алгебрийн бүх хууль биеллээ.

Бид үүгээр олонлогийн алгебрын бүх хуулиуд биелж байхаар нэмэх ба үржих үйлдлийг тодорхойлж болох "юмсын" олон янзын систем орши байхыг үзлээ.

Хойно бид тийм алгебрийн тун сонирхолтой чухал хоёр жишээ үзнэ.

Тийм бүх алгебрын ерөнхий чанарыг судлахад шилжихийн тулд тэдгээрт ямар нэг ерөнхий нэр өгөх хэрэгтэй. Хачин сонирхолтой шинж чанар бүхий энэ алгебруудыг анх XIX зууны үед английн гайхамшигт математикч Джордж Буль¹ авч үзсэн болохоор одоо үед тэдгээрийг *Бульн алгебр*² гэж нэрлэдэг юм.

Бульн алгебрийн үндсэн үйлдлүүдийн хувьд "нэмэх" ба "үржих" нэрийг хэвээр нь хадгалаа (гэвч энэ нь тооны ердийн нэмэх ба үржих үйлдэл огт биш гэдгийг санаж явах хэрэгтэй). Гэхдээ цаашид бид заримдаа энэ хоёр үйлдлийг *бульн нэмэх* *бульн үржих* үйлдэл гэж нэрлэнэ. Гарын авлага зориулж буй энэ ер бусын алгебрын талаар дэлгэрэнгүй судалсан Дж. Бульн бүтээл нь анх 1854 онд өөрөөр хэлбэл одоогоос 100 гаруй жилийн өмнө гарчээ. Энэ бүтээл нь "Сэтгэхүйн хуулиудын шинжилгээ" («Investigation of the laws of thought») гэдэг нэртэй байжээ.

Одоохондоо энэ нэр чамд сонин санагдаж магадгүй, гэвч энэ номыг уншаад энд авч үзэж буй гайхамшигт алгебрууд нь манай сэтгэхүйн хуулиудтай ямар холбоотой байгааг ойлгох болно.

Хэдийгээр Бульн бүтээлийг анхандаа математикчид бага анхаардаг байсан боловч, одоо үед түүнийг их сонирхох болсон нь Бульн алгебр "сэтгэхүйн хуулиудтай" холбоотой байдагт л оршиж байгаа юм. Сүүлийн жилүүдэд энэ бүтээл янз бүрийн улсад олон дахин орчуулагдаж, олон дахин хэвлэгдэж байна. Бульн алгебр гэдэг ойлголтыг нэлээд олон улс ямар нэг хэл бэрээр сургуулийн математикийн программдаа хэдийн оруулжээ. Харин бусад оронд, тухайлбал ЗХУ-д энэ ойлголтыг дунд сургуулийн программд оруулах асууд-

¹ Овод романы зохиогч английн алдарт зохиолч эмэгтэй Этель Лиллиан Бульн эцэг (Войнич Овгоор алдаршсан польшийн хувьсгалч М. Войнич-түүний нөхөд).

² Бульн алгебрын нарийн тодорхойлолт хавсралтанд бий.

он одоо идэвхтэй хэлцэж байгаа ба математикчид болоод сурган хүмүүжүүлэгчдийн дотроос энэ асуудлыг нуунаар дэмжигчид цөөнгүй болжээ¹.

Дасгалууд

1. "2 тооноос тогтсон Бульн алгебрийн" ямарч гурван элементт хувьд хаалт нээх хууль хоёулаа биелэхийг шууд шалга.

а) дүгээр хуудас жишээ 1).

2. "4 тооноос тогтсон Бульн алгебрийн" хэд хэдэн гуравгуули хувьд хаалт нээх хууль хоёулаа биелэхийг шалга. (... дугаар үеас жишээ 2).

3. а) Танай байранд чамаас өөр сурагч ба"хгүй бол "танай ямары сурагчдын бүх олонлог" гэвэл: нэг сурагчаас тогтсон элемент ба нэг сурагчийг агуулаагүй 0 элемент (хоосон олонлог) орно юм. "Танай байранд суудаг сурагчдын олзлогийн алгебр" нь хувьд (энэ алгебр нь I ба 0 гэсэн 2 элементтэй) "нэмэх" "үржих" үйлдлийн таблич зохиож түүнээ 1 дүгээр жишээний табличтай жиш. 1 дүгээр жишээний хувьд Бульн алгебрийн бүх хууль биелэхийг эндээс гарга.

б) Нэг байранд Петя ба Катя хоёр суудаг гэс. Тэгвэл "энэ байранд суудаг сурагчдын олонлогийн алгебр" нь 4 элемент агуулдаг I олонлог хоёр сурагчаас, тус бүр нэг сурагчаас тогтх II (Петя) ба K (Катя) гэсэн 2 элемент, 0 хоосон элемент бэлэ. Олонлогуудын энэ алгебрын хувьд "нэмэх" ба "үржих" үйлдлийн табличыг зохиож түүнийгээ энэ зүйлийн 2 дугаар жишээний табличтай жишж, эндээсээ 2 дугаар жишээний "дөрвөн тооны алгебрын" хувьд Бульн алгебрийн бүх хуулиуд биелэхийг гарга.

$$4. \text{ а) } \min \left\{ \max \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right], \frac{1}{4} \right\} = \max \left\{ \min \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right], \frac{1}{3} \right\} \\ \min \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right] \} \text{ ба } \max \left\{ \min \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right], \frac{1}{4} \right\} = \min \left\{ \max \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right], \frac{1}{3} \right\} \\ \max \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right] \} \odot$$

б) $\{(12, 30), 8\} = \{(12, 8), (30, 8)\}$ ба $\{(12, 30), 8\} = \{(12, 8), (30, 8)\}$ бие биеийг шалга.

5. а) $0, \frac{1}{2}$, 1 тооноос бүрдсэн $\times \oplus \cup = \max \{x, y\}$ ба $\times \cap \cup = \min \{x, y\}$ үйлдэлтэй Бульн алгебрийн "нэмэх" ба "үржих" үйлдлийн таблич зохиож Бульн алгебрийн бүх хуулиуд биелэхийг шалга.

б) $m \oplus n = [m, n]$ ба $m \otimes n = (m, n)$

Эндэлтэй 12-ын хуваагчдын алгебрийн хувьд "нэмэх" ба "үржих" үйлдлийн таблич зохио. Энд Бульн алгебрийн зарим хууль биелэхийг шалга.

¹ Энэ ном 1968 онд хэвлэгдсэнийг сана. (хэв. ред.)

6.* Натурал тоо N -ийг анхны үржигдхүүнд задалсан задаргал
 $N = p_1^{A_1} p_2^{A_2} \dots p_k^{A_k}$ боло. N тооны дурэн хоёр хуваагч
 ба n -ийг

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \text{ үүнд } 0 \leq a_1 \leq A_1, \dots, 0 \leq a_k \leq A_k.$$

$$0 \leq a_k \leq A_k$$

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k} \text{ үүнд } 0 \leq b_1 \leq A_1, \dots, 0 \leq b_k \leq A_k.$$

$$0 \leq b_k \leq A_k$$

гэж бичиж болно. Тэгвэл $\{m, n\}$ ба (m, n) тоог анхны үржигдхүү
 нүүдээр задаргал задаргаа ямар хэлбэртэй байх вэ? Энэ задаргал
 гаа ашиглан N тоонч бүх хуваагчдыг олзимс нь $m \mid n = \{m, n\}$
 ба $m \odot n = (m, n)$ үйлдэлтэй Булийн алгебр үүсгэхийг батал.

3§ Булийн алгебрын цаашдын чанар, хоёрлох зарчим, Булийн тэнцэтгэл ба тэнцэтгэл бишүүд

Булийн алгебр гэж нэрлэсэн ер бусын алгебрыг
 судалгааг үргэлжлүүлэ. Булийн нэмэх ба булийн үр
 жих үйлдлийн чанарууд тун ч төстэй байдаг нь нүдэн
 шууд тусаж байна. *Булийн алгебрын ямарч (м,
 дээж зөв) томьёонд нэмэхийг үржихээр мөн үр
 вуугаар үржихийг нэмэхээр сольж болно, тэгэхэ
 тэнцэтгэл хүчинтэй хэвээр байна. Жишээ нь; Були
 алгебрт*

$$A(A+C)(B+C) = AB + AC$$

тэнцэтгэл биелнэ. Энд нэмэхийг үржихээр, үржихийг
 нэмэхээр соливол

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

гэсэн хүчин төгөлдөр тэнцэтгэлд хүрнэ (үүнийг хойн
 батална). Харин *Булийн алгебрийн тэнцэтгэлд*
*ба I гэсэн "онцгой" элемент оролцож байвал Y -ийг
 лийг солихийн сацуу 0 элементийг I -ээр I эле
 ментийг 0 -ээр тус тус бас солих хэрэгтэй.*

Жишээ нь: $(A+B)(A+I) + (A+B)(B+O) = A +$
 тэнцэтгэлээс $(AB+AO)(AB+BO) = AB$ гэж гарна.

Ямарваа тэнцэтгэлээс "үнэгүй" (батлахгүй) шинэ¹
 тэнцэтгэлийг гаргах Булийн алгебрийн энэ чанарыг
хоёрлох зарчим гэж нэрлэх ба энэ зарчмаар бие биеэ-
 сээ гарч байгаа тэнцэтгэлүүдийг бие биедээ хоёрло-
 мол тэнцэтгэлүүд гэнэ. Бид Булийн ямар нэг томьёог
 батлахдаа түшиглэх Булийн алгебрийн үндсэн хуулиуд
 нь тун ч "тэгш хэмтэй" гэдгээс л хоёрлох зарчим гарч
 байна.

Жишээ нь нэмэхийн байр солих хуульд үржихийн
 байр солих хуульд хоёрломол нэмэхийн бүлэглэх хуульд
 үржихийн бүлэглэх хуульд, нэмэхийн идемпотент хуульд
 үржихийн идемпотент хуульд, хаалт нээх 1 дүгээр
 хуульд хаалт нээх 2 дугаар хуульд тус тус хоёрломол
 юм. Эцэст нь

$$A + O = A \text{ ба } A + I = I$$

тэнцлүүдэд

$$AI = A \text{ ба } AO = O$$

тэнцлүүд хоёрломол юм.

Иймд бид булийн алгебрийн үндсэн хуулиудыг
 ашиглан ямар нэг тэнцэтгэлийг баталсан бол, тэдгээр
 ашигласан хуулиудад хоёрлох тэнцэтгэлүүдийг ашиг-
 лан саяын баталсан тэнцэтгэлд хоёрлох тэнцэтгэлийг
 мөн баталж чадна.

Жишээ. $(A(A+C)(B+C) = AB + AC)$ тэнцэтгэлд хоёрло-
 мол $A + AC + BC = (A+B)(A+C)$ тэнцэтгэлийг батла. Үнэ-
 хээр $A + AC + BC = A + (AC+BC) = A + (A+B)C = (A+B)C +$
^{нэмэхийн}
^{хаалт нээх 1 дү-}
^{байр солих}
 гээр хууль
 бүлэглэх хууль

¹ Булийн алгебрийн ямар нэг томьёоноос хоёрломолын зарч-
 маар гарсан "шинэ" томьёо анхны томьёотой давхцаж ч болно.

$$(A+B)(B+C)(C+A) = AB + AC + BC\text{-ийн}$$

"нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр солиход

$$A + B + AC + BC = (A+B)(B+C)(C+A) \text{ түүнтэй тэнцэтгэлд}$$

шилжинэ.

$$(I\text{-ийн дасгал 6}). \text{ Харин } (A+B)(B+C)(C+D) = AC + BC + BD$$

нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр солиход үүнээс ялгуу өөр
 $AB + BC + CD = (A+C)(B+C)(B+D)$ тэнцэтгэлд шилжинэ.
 Гэтэл энд $(B+C)$ -ээр соливол анхны тэнцэтгэл гарна).

$$+ A = [(A+B)+A] \quad (C+A) = [(A+A)+B] \quad (A+C) = (A+B) \quad (A+C)$$

хаалт нээх
II хууль
нэмэхийн бйр
солх ба бүлэг-
лэх хууль
идемпент
хууль

(18-ийн 4 дүгээр дасгалын бодолттой жиш!)

Булийн алгебрийн онцгой үйлдэлтэй уялдаатай хоёрлох зарчмын өөр нэг баталгаа байдаг. Энэ үйлдэл нь: Булийн алгебрын элемент A бүрийг өөр шинэ A элементэд шилжүүлдэг энэ үйлдлийг «зураас» үйлдэл гэж нэрлэе. Харин энэ үйлдлийг хэрэглэх бүрдээ нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр өөрөөр хэлбэл

$$A+B = \overline{A}\overline{B} \text{ ба } \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

солино. Цаашилбал

$$\overline{0} = 1 \text{ ба } \overline{1} = 0$$

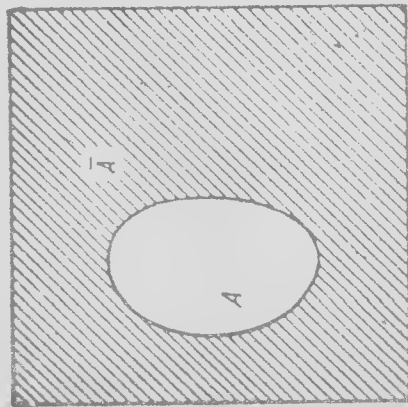
\overline{A} элементийн «Зураас» үйлдэл нь түүнийг анхны A элементэд аваачна. Өөрөөр хэлбэл

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Олонлогийн алгебрт «зураас» үйлдэл нь (энэ өвөрмөц үйлдэл нь нэмэх үйлдэл шиг хоёр элементээс шинэ элемент үүсгэдэггүй, харин ганц элементээс үүсгэдэг) дараахь утгатай байна. Үүнд: A олонлогийн гүйцээлт \overline{A} гэж үзнэ, өөрөөр хэлбэл \overline{A} нь универсал I олонлогийн A дэд олонлогт ордоггүй зөвхөн тийм элементүүдээс тогтоно. Жишээ нь универсал олонлог болгож танай ангийн бүх сурагчдын олонлогийг авбал, A нь 1 дүгээр улиралд нэг муу дүн авсан сурагчдын удаа муу дүн аваагүй

19 дүгээр зураг.

дын олонлог гэвэл \overline{A} нь ганц ч сурагчдын олонлог болно.



A олонлогийн гүйцээлтийн тодорхойлолтоор

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ ба } A + \overline{A} = I, \overline{AA} = 0$$

ж гарна. (19 дүгээр зураг хар); Сүүлчийн 2 тэнцэтгэлийг \overline{A} олонлогийн тодорхойлолт болгож авч болно).

$$\overline{0} = I \text{ ба } \overline{1} = 0$$

ийх нь бас илэрхий.

Эцэст нь де Морганы дүрэм нэртэй олонлогийн алгебрт биелэх «зураас» үйлдлийн

$$\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B} \text{ ба } \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

гэсэн чухал чанарыг баглая.



a)



b)

20 дугаар зураг.

20 а зураг дээр зүүн тийш хазайлттай шугамаар A (дүрс) олонлог, 20 б зураг дээр бүтэн квадрат I хүргэх түүний гүйцээлт \overline{A} -г баруун тийш хазайлттай шугамаар 20 а зураг дээр хэвтээ шугамаар B олонлог (дүрс) 20 б зураг дээр босоо шугамаар түүний гүйцээлт \overline{B} -г зурааслажээ.

Тэгвэл $A+B$ нь 20 а зураг дээрх зурааслагдсан олонлог, \overline{AB} нь 20 б зураг дээрх хоёр удаа давхар зурааслагдсан (торлогдсон) олонлог болно. 20 а 20 б зургийг харьцуулбал 20 б дээрх давхар зурааслагдсан дүрс нь 16 а дээрх зурааслагдсан дүрсийн гүйцээлт байна, энэ нь $\overline{A+B} = \overline{AB}$ гэсэн де Морганы 1 дүгээр дүрмийг баталж байна. Нөгөө талаас 20 а дээр AB (A, B олонлогийн огтлолцоо) давхар зурааслажээ. Харин 20 б дээр $\overline{A+B}$ нь бүх зураасласан хэсэг. Иймд энэ 2 олонлог нь бие биеийн гүйцээлт болох нь харагдаж байна, өөрөөр хэлбэл

$$\overline{AB} = \overline{A+B}$$

Одоо „зураас“ үйлдлийн утгыг Булийн алгебрийн дээр үзсэн жишээнүүдийн хувьд сонирхоё. Хоёр тооны алгебрт (2§-ийн жишээ)

$$\overline{0} = 1 \text{ ба } \overline{1} = 0$$

гэвэл энэ алгебрийн дурын a элементийн хувьд $\overline{\overline{a}} = a$ байх нь илэрхий. Цаашилбал $\overline{0} = 1$ ба $\overline{1} = 0$ тоонуудын „үржихийн таблиц ба“ «нэмэхийн таблицийг»

+	0	1	$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$
0	0	1	$\overline{0} = 1$
1	1	0	$\overline{1} = 0$

харьцуулж харвал ямар тохиолдолд $\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ гэж гарна. Үүний адилээр де Морганы 2 дугаар дүрмийг шалгана.

Дөрвөн тооны алгебрт (2§-ийн 2 дугаар жишээ)

$$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = p \quad \overline{q} = p \quad \overline{p} = 0$$

гэж авбал дахиад л дурын a -гийн хувьд $\overline{\overline{a}} = a$ байх нь илэрхий! $\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ тэнцэтгэлийг шалгахын тулд

	0	p	q	1	$\overline{0} = 1$ $\overline{p} = q$ $\overline{q} = p$ $\overline{1} = 0$
0	0	p	q	1	$\overline{0} = 1$
p	p	p	1	1	$\overline{p} = q$
q	q	1	q	1	$\overline{q} = p$
1	1	1	1	1	$\overline{1} = 0$

хоёр таблицыг жишээ хангалттай.

Үүний адил $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$ шалгана. Одоо максимум ба минимум алгебрт шилжнэ. Энэ алгебрийн элементүүд нь $0 \leq x \leq 1$ х x тоонууд ба булийн нэмэх \oplus ба булийн үржих \odot (буюу \otimes) үйлдүүд нь

$$x \oplus y = \max [x, y] \text{ ба } x \odot y = \min [x, y]$$

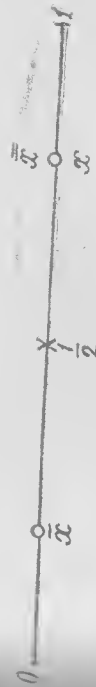
ж тодорхойлогддог билээ. Энэ алгебрт

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \odot \overline{y} \quad \overline{x \odot y} = \overline{x} \oplus \overline{y}$$

де Морганы хоёр дүрэм өөрөөр хэлбэл $\overline{\max [x, y]} = \min [\overline{x}, \overline{y}]$ ба $\overline{\min [x, y]} = \max [\overline{x}, \overline{y}]$ биедхний тулд „зураас“ үйлдэл элементийн эрэмбийг л урвуулаг байх, өөрөөр хэлбэл $x \leq y$ гэдэг $y \leq x$ гэж гарлаа байх хэрэгтэй (яагаад?) Иймд хэрэв $0 \leq x \leq 1$ байх бүх x тоонууд нь манай алгебрийн элементүүд гэвэл

$$\overline{\overline{x}} = 1 - x$$

авч болно, өөрөөр хэлбэл \overline{x} цэг нь $[0, 1]$ хэрчмийн дундач цэг хувьд x цэгт тэгш хэмтэй байна гэж үзэж болно.



21 дүгээр зураг.

үгээр зураг). Тийм үед

$$\overline{0} = 1, \overline{1} = 0 \text{ ба } \overline{\overline{x}} = x \text{ байх нь илэрхий.}$$

$$x \oplus y = \overline{x \odot y}, \quad x \odot y = \overline{x \oplus y}$$

де Морганы дүрэм биедх нь илэрхий (22 а, б зураг).

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

үзье. Үүний хоёр талд «зураас» үйлдлийг хэрэглэвэл

$$\overline{A(A+C)(B+C)} = \overline{AB+AC}$$

1110. Тэгвэл де Морганы дүрмээр

$$\overline{(A+C)}(B+C) = [\overline{A(C+C)}](B+C) = \overline{A(A+C)} + \overline{B+C} = \overline{A} + \overline{A+C} + \overline{B+C} = \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B+C} + \overline{B+C} = \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{B+C} = \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A+B} \quad \text{5a}$$

оно. Тийнхүү эцэст нь $\bar{A} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{C})$ гэдэг энэ тэнцэл нь дурын \bar{A} , \bar{B} ба \bar{C} -ийн хувьд шөлөх тул \bar{A} , \bar{B} ба \bar{C} элементүүдийг A , B ба C гэж нилэгтгэвэл

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

Эн анхны тэнцэгтэд хоёрдомол тэнцгэл гарна. Энхүү «зураас» үйлдлийн чанараас л хоёрдомолын зарчим гарч байна (юуны урьд де Морганы дүрмээс!) Энэ үед хэрэв өгсөн тэнцэгтэд нь 0 буюу 1 гэсэн «онцгой» мөнгийг агуулж байвал

$$\bar{O} = I \bar{O} a \bar{I} = O$$

өнцэгтгэлээр хувиргасан (хоёрлох) тэнцэтгэлд O -ийн оронд I , ба I -ийн оронд O -ийг бичхээ мартаж болох-
нон юм.

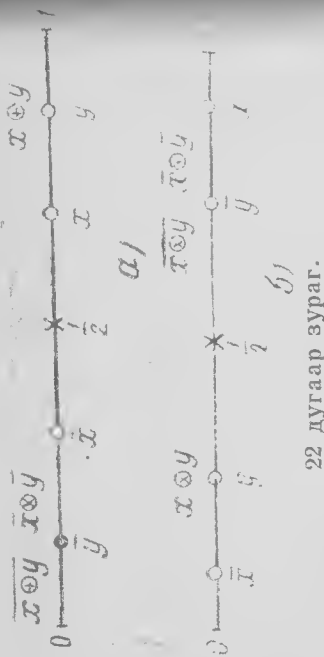
Жишээ нь, $A(A+I)(A+O) = AB$ тэн. **24** гэлийн хоёр талд
« AB » үйлдлийг хэрэглэвэл

[illegible]

иню. Гэтэл сүүлчийн тэнцэтгэл нь (энд \overline{A} ба \overline{B} нь дурын) учраас

$$A + AO + BI = A + B$$

III анхны тэнцэгтэд хоёрломол тэнцэгтэлтэй адил чанартай байна.



Эцэст нь хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн хуваагчдын алгебрыг авч үзье. N тооны хуваагчид нь N алгебрын элементүүд болох ба бүтэйн нэмэх $+$ ба бүтэйн үржих \cdot үйлдлүүдээр хамгаалагдсан бүтэйн алгебрыг үүсгэнэ.

ҮЙЛДЛҮҮД НЬ $m \oplus n = [m, n]$, $m \odot n = (m, n)$

энд $[m, n]$ нь ба n хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч, харин m , n нь тэдгээрийн хамгийн их ерөнхий хуваагч болно.

$$\frac{N}{m} =$$

гэж авна гэвэл $N = 210$ тохиолдолд

$$\begin{array}{l} \overline{1} = 210, \quad \overline{2} = 105, \quad \overline{3} = 70, \quad \overline{5} = 42, \quad \overline{6} = 35, \quad \overline{7} = 30, \quad \overline{10} = \\ \overline{14} = 15, \quad \overline{15} = 14, \quad \overline{21} = 10, \quad \overline{30} = 7, \quad \overline{35} = 6, \quad \overline{42} = 5, \quad \overline{70} = 3 \\ \overline{105} = 2, \quad \overline{210} = 1 \end{array}$$

боллю. Энэ үед $\bar{I} = N$ ба $\bar{N} = 1$ байх нь ойлгомжтой. Мөн

$$\frac{N}{m} = \frac{m}{N|m}$$

байх нь нлэрхий. Де Морганы

Operation	Symbol	Properties
Intersection	\cap	Commutative, Associative, Distributive
Union	\cup	Commutative, Associative, Distributive
Set Difference	\setminus	Not Commutative, Not Associative
Symmetric Difference	\oplus	Commutative, Associative
Cartesian Product	\times	Not Commutative, Not Associative
Power Set	\mathcal{P}	Not Commutative, Not Associative

дүрэм биелнэ. Жишээ нь $6 \oplus 21 = [6, 21] = 42$

$$\overline{6 \odot 21} = 35 \odot 10 \dots (35, 10) = 5 \text{ хариш } \overline{42} = 5 \text{ ба } 6 \odot 21 =$$

$$-(6\ 21) = 3\ 6a\ \overline{6\ 21} = 35 \oplus 10 = [35, 10] = 70 \text{ xapии } \overline{3} = 70$$

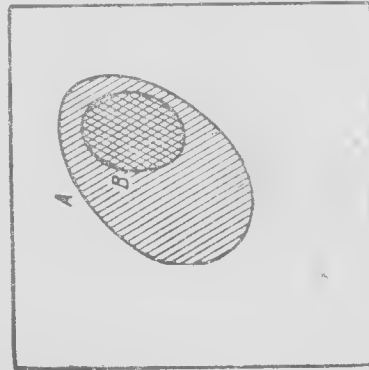
Одоо алваа Будийн алгебрт биедэг ямар нэг тэнцэтгэлийг
тухайлбал, бидний мэдэх

Хоёрломолын зарчим нь бидний тогтоосноос бүр өргөн хүрээтэй хэрэглэгддэгийг дурдая. Жишээлхэл булийн тэнцэлтэй хамт «булийн тэнцэл бишид» бас хэрэглэгдэнэ. Үүнийг тайлбарлахын өмнө булий алгебрт нэн чухал үүрэг гүйцэтгэдэг бас нэг ухагд хуунтай танилцаа.

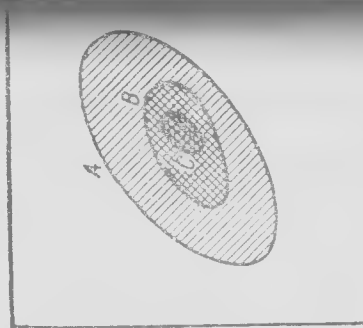
Ямарваа Булийн алгебрт элементүүдийн ухагдхуун хамт ($A = B$ тэнцэлтэл нь: A, B нь Булийн алгебрийн нэг ижил элемент гэсэн үг) өөр нэг чухал харьцаа орнодог юм. Энэ нь тооны алгебрт «их» (эсвэл «бага») гэрнэрлэж заншсан харьцааны гүйцэтгэдэг үүрэгтэй (төсөөтэй утгатай харьцаа юм. Энэ харьцааг \supset (эсвэл \subset) тэмдгээр тэмдэглэнэ.

$$A \supset B \text{ эсвэл } B \subset A$$

гэж бичнэ. (Сүүлчийн хоёр харьцаа нь нэг адил утгатай ба $a > b$ эсвэл $b < a$ -тай төстэй юм). Олонлогийн алгебрт $A \supset B$ гэдэг нь A олонлог B олонлогийн өөрийнхөө хэсэг болж агуулна гэдгийг заана (23 дугаар зураг). Жишээ нь: A_2 тэгш тоонуудын олонлог, A_6 6-



23 дугаар зураг



24 дүгээр зураг

хуваагдах тоонуудын олонлог бол

$$A_2 \supset A_6 \text{ байна.}$$

мөн A танай ангийн үүрэгтэй суралцагсдын олонлог, олонлогийн олонлог бол $A \supset B$ байх шүү дээ. A ба

олонлогууд давхцаж байлаа ч гэсэн бид $A \supset B$ гэж үзэж болно. Энэ үед B олонлог A -д бүхлээрээ агуулагдах шүү дээ! Тийнхүү Булийн алгебрийн элементүүдийн хоорондох \supset харьцаа нь тоонуудын хоорондох \geq «их юмуу тэнцүү» харьцаатай төстэйгээс биш (эерс их.) харьцаатай төстгүй юм.

Хэрэв $A \supset B$ ба $B \supset C$ бол $A \supset C$ байх нь ойлгомжтой.

(24 дүгээр зураг). Үүнтэй адилаар тоонуудын хувьд ч $a \geq b$ ба $b \geq c$ харьцаанаас $a \geq c$ гэж гардаг билээ.

$$A \supset B \text{ ба } B \supset A \text{ бол } A = B$$

байна. Тоонуудын хувьд бас $a \geq b$ ба $b \geq a$ бол $a = b$ байдаг билээ. Эцэст нь (энэ бидэнд онцгой чухал!) $A \supset B$ бол $A \subset B$ (25 дугаар зураг) байна.

Жишээ нь үүрэгтэй суралцагсдын олонлог нь онцгуудын олонлогос их гэдгээс үүрэгтэй (муу) суралцагсдын олонлог онц суралцагчдын суралцагсдын олонлогт агуулагдана гэж гарна.

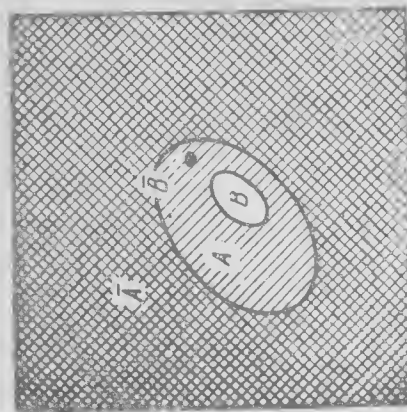
Энэ хүртэл бид олонлогийн \supset харьцаагаар тооны \geq харьцааны төстэй талыг онцлон үзлээ. Одоо энэ хоёр харьцааны нэг бол ялгааг дурдая.

Ямарч хоёр тоог (болонгтой) хооронд нь жишиж болно, өөрөөр хэлбэл, $a \geq b$ ба $b \geq a$ харьцааны ядаж нэг нь хүчинтэй. Игвэл A ба B олонлогийн хувьд $A \supset B$ ба $B \supset A$ харьцааны аль нь ч биелэхгүй байж болно (26 дугаар зураг)

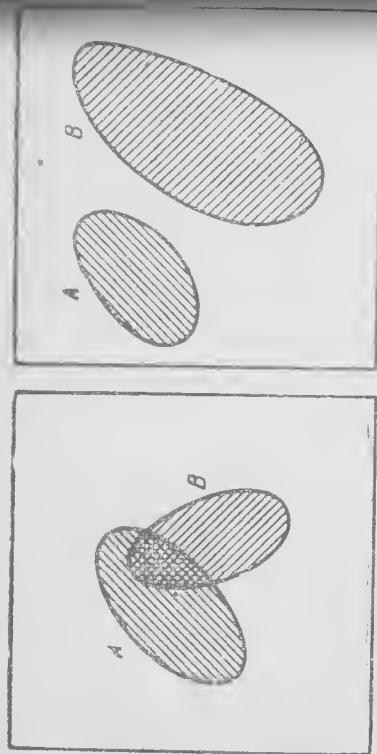
Олонлогийн алгебрийн ямарваа A элементийн хувьд

$$I \supset A \text{ ба } A \supset O$$

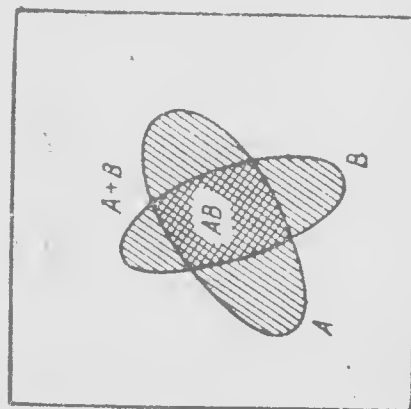
нь ямарваа A ба B элементийн хувьд



25 дугаар зураг



26 дугаар зураг



27 дугаар зураг.

$$A + B \supset A \quad ABC \subset A$$

(27 дугаар зураг) байна.

Бидний мэдэх бусад Булийн алгебрийн хувьд \supset харьцааны утга учрыг гаргая. «Хоёр тооноос тогтох алгебр» (2 §-ийн 1 дүгээр жишээ) энэ харьцааг

$$1 \supset 0$$

гэж, харин «Дөрвөн тооны алгебр» (2 §-ийн 2 дугаар жишээ)

$$1 \supset 0, 1 \supset p, 1 \supset q, p \supset 0$$

ж тодорхойлов. (p, q -нь жишгдэхгүй, өөрөөр хэлбэл $p \supset q, q \supset p$ харьцааны нэг нь ч үл биелнэ. «Максимум ба минимумы алгебр» (2 §-ийн 3 дугаар жишээ) \supset харьцаа нь \geq харьцаатай давцана. Үүнд: хэрэв x тоо нь y тооноос багагүй бол $x \supset y$ биелэнэ гэж үзнэ. Тэгэхлээр (жишээлэхэд $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{3}$ ба $1 \supset 1$) Эцэст нь «хам-ийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчдын алгебр» (2 §-ийн 1 дүгээр жишээ) m тооны хуваагч нь n бол $m \supset n$ гэж авна. Энд $1 \supset 6$ ба $42 \supset 35$ нь жишгдэхгүй. Эдгээр Булийн алгебрт то-орхойлсон \supset харьцаа нь олонлогийн алгебр дахь \supset харьцааны бүх шинэ халгална гэдгийг шалгаж үзээрэй!

Баруун ба зүүн хэсэг нь \supset (эсвэл \subset) харьцаагаар холбогдсон томъёог *Булийн тэнцэтгэл биш* гэдэг. Ид энд тэнцэтгэл бишид орж буй Булийн алгебрийн $1, B, C, \dots$ элементүүдийн бүх утгад хүчинтэй бай-аг, тухайлбал дээр авч үзсэн $1 \supset A, A \supset 0, A + B \supset A, 1 \supset AB$ тэнцэтгэл бишүүд шиг тийм тэнцэтгэл бишүү-ийн тухай ярих болно.

Тэгвэл хоёрлох зарчмаар *Булийн тэнцэт-гэл бишид үржихийг нэмэхээр, нэмэхийг үржи-хээр, 0 элементийг (хэрэв энэ элемент манай тэнцэл бишид орвол) 1-ээр, 1 элементийг 0 эле-ментээр солиод мөн тэнцэл бишийн тэмдгийг үрвүүлснээр (өөрөөр хэлбэл \supset харьцааг \subset харь-цаагаар нь) солиход дахиад л үнэн тэнцэтгэл биш (өөрөөр хэлбэл түүнд байгаа Булийн эле-ментийн бүх утганд биелэх) гарна.*

Жишээ нь: $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$ (энэ зүйлийн төгс-мөд байгаа дасгалын 86 үз) гэдгээс

$$AB + AC + AO \subset A + B + C$$

ж ямагт гарна.

Хоёрлох зарчмыг батлахын тулд өгсөн тэнцэтгэл бишийн хоёр шд нь «зураас» үйлдлийг хэрэглэвэл хангалттай. $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$ тэнцэтгэл биш ба, «хэрэв $A \supset B$ бол $A \subset B$ бай-н» гэсэн дүрмээс $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$ тэнцэтгэл биш бис хүчинтэй гэж гарна. Тэгвэл $I = 0$ гэдгийг анхаарвал де Мор-ганы дүрэм ёсоор $(A + B)(A + C)(A + I) = (A + B)(A + C) + A + I = A + B + A + C + AI = AB + AC + AO$ болно.

¹ Булийн энэ алгебрт ямарч хоёр x, y элементийн хувьд $x \supset y$ ба $y \supset x$ хоёр харьцааны ядахдаа нэг нь ямагт биелнэ.

Үүний адил $ABC = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Тийнхүү Булийн алгебрийн дурын A, B, C элементүүдийн хувьд

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}B \supset \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

тэнцэтгэл биш хүчтэй. Нэгэлт A, B, C нь дурын элементүүд тул эдгээрийг A, B, C гэвэл

$$AB + AC + AO \subset A + B + C$$

гэсэн өгсөн тэнцэл бишид дээрх заасан утгаар хэтрлосон тэнцэл бишид хүрч ирлээ.

Дасгалууд

1. 1 §-ийн 1—10 дугаар дасгалын бүх тэнцэтгэлтэй хоёрлох бүх тэнцэтгэлүүдийг бич.

2. Олонлогийн алгебрийн дараахь адилтгалуудыг батал:

а) $(A + B)(A + \bar{B}) = A$

б) $AB + (A + B)(\bar{A} + \bar{B}) = A + B$

в) $ABC \bar{A}\bar{B} AC = 0$

г) $A + \bar{A}\bar{B} = A + B$

3. Булийн алгебрийн ямар нэг тэнцэтгэл «зураас» үйлдэл орсо байвал уг тэнцэтгэл нэмэхийг үржлээр, үржлээг нэмэхээр 0 ба 1 элементийг бие биеэр нь сольж, харин «зураас» үйлдлийг бий байранд нь хэвээр үлдээхэд мөн зөв тэнцэтгэл гарна. [Жишээ дугаар дасгалын в-гээс:

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{A} + \bar{B} + \bar{A} + \bar{C} = I \text{ гэж гарна}]$$

4. 2 а, б, г дасгал, 3 дугаар дасгалд дурдсан хоёрлох зарчмаар ямар тэнцэтгэлүүд үүсэх вэ?

5. «Дөрвөн тооны алгебр» $ab = \bar{a} + \bar{b}$ гэсэн де Морганы хоёр дугаар дүрэм биелэхийг шалга.

6*. а) $N = P_1 P_2 \dots P_k, P_1, \dots, P_k$

нь өөр хоорондоо ялгаатай анхны тоонууд байг. Энэ үед N -ийн хуваагчид элемент нь болох «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагч»-ийн алгебр «нь» $I = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ универсал олонлогийн дэд олонлогуудын алгебрт шилжих ба энд де Морганы дүрмийн сацуу Булийн алгебрийн бүх хуулиуд биелнэ гэдгийг гарга.

б) $N = P_A, P$ -анхны, A -натурал тоо байг. Энэ үед N -ийн хуваагчид элемент нь болох «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебр» нь $\{0, 1, 2, \dots, A\}$ тоонууд дээр тодорхойлогдсон «максимум ба минимумын утгын алгебр» шилжихийг бага

ндээс «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн» мөн үр алгебрт Булийн алгебрийн бүх дүрмүүд ба де Морганы дүрэм биелнэ гэдгийг гарга.

в) $N = P_1^A P_2^{A_2} \dots P_k^A, m = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_k^{a_k}$

үүнд $0 \leq a_1 \leq A_1, \dots, 0 \leq a_k \leq A_k$ байг. (2§-ийн 6 дугаар дас-

галтай харьцуул). $m = \frac{N}{m}$ тоог анхны үржлэхүүнд задалсан үүсгэлээр ямар хэлбэртэй байх вэ? «Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их ерөнхий хуваагчийн алгебрт» де Морганы дүрэм биелэхийг олсон томъёогоо ашиглан батал.

7*. $A + A = I$ ба $AA = O$ гэсэн тэнцэтгэлүүд чний мэдэх Булийн ямар алгебрт биелэх ба ямарг нь үл биелэх вэ?

8. Олонлогийн алгебрын дараахь тэнцэтгэл бишүүдийг батал.

а) $A + B + C \supset (A + B)(A + C)$;

б) $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$;

в) $(A + B)(B + C)(C + A) \supset ABC$;

г) $A + B \supset AB + \bar{A}\bar{B}$.

9. 8 а-в дасгалаас хоёрлох зарчмаар гаргах тэнцэтгэл бишүүдийг бич. Хоёрлох зарчим ашиглангүйгээр энэ тэнцэтгэл бишүүдийг шууд батал.

10. Хэрэв булийн тэнцэтгэл биш нь «зураас» үйлдлийг агуулж байвал, түүний Булийн үржлэхийг булийн нэмэхээр, мөн урвуулж O элементийг I элементээр, мөн урвуулан сольж харин «зураас» үйлдлийг байранд нь үлдээж, тэнцэтгэл бишийн тэмдгийг урвуугаар нь соливол мөн зөв тэнцэтгэл биш гарна. 8 г дасгалаас шинэ тэнцэтгэл биш гаргахдаа энэ загчмыг хэрэглэ.

11. \supset харьцаагч бүх чанарыг

а) «Максимум ба минимум утгын алгебрт»

б) «Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебрт» шалга.

12*. A ба B олонлогийн хувьд $A \supset B$ байг.

а) $A + B, \quad б) \quad AB, \quad в) \quad A + \bar{B}, \quad г) \quad \bar{A}\bar{B}$

илэрхийлүүдийг хялбарчил.

4 §. Олонлог ба хэллэг, Хэллэгийн алгебр

Энэ товхимолын хувьд үндсэн хэсэг болох олонлогийн булийн алгебрт эргэж орёе. Энэ алгебрийн элементүүд болох олонлогуудыг яаж тодорхойлж болдгийг авч үзье. Олонлогийг өгөх хялбар арга нь өгөх

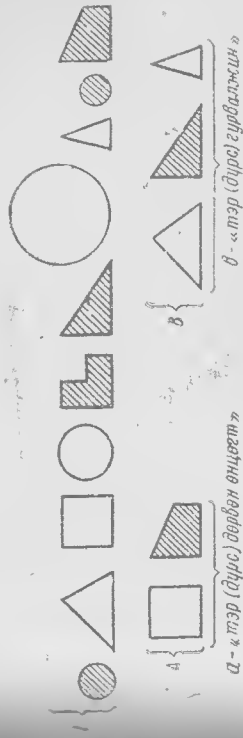
буюу *тоолох арга* гэж нэртэй. Энэ аргаар бол авч үзэж буй олонлогийн бүх элементүүдийг заадаг (дуурагдаг) жишээ нь «Саша, Сеня, Миша, Катя гэсэн сурагчдын олонлог»-ийн тухай «1, 2, 3, 4, 5» гэсэн тоонуудын олонлогийн «тухай эсвэл» нэмэх, хасах үржих, хуваах гэсэн арифметикийн 4 үйлдлийн олонлогийн тухай ярьж болно. Математикт ямар нэг олонлогийн бүх элементүүдийг заагаад, тэдгээрийг их хаалтанд хийдэг. Тухайлбал $A = \{\text{Саша, Сеня, Катя, Миша}\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ эсвэл $C = \{+, -, \times, \div\}$ (сүүлчийн бичлэгт үйлдлийн тэмдгүүд нь уг үйлдлүүдээ төлөөлнө).

Олонлогийн элементүүд нь маш олон үед олонлогийг тэгж өгөх нь тун тохиромжгүй байдаг, төгсгөлгүй олонлогийг тэгж өгөх нь бүрч зохимжгүй (олонлогийн төгсгөлгүй олон элементийг бид тоолж чадахгүй шүү дээ!) Бас заримдаа олонлогийг өгөх арга нь боломжтой хялбарч гэсэн авч үзэж буй олонлогийн уг утгын бүдэгрүүлж, чухам л яг энэ элементүүдийг нэг олонлогт нэгтгэх болсон үндсэн санааг илрүүлдэггүй.

Олонлогийг өгөх маш дэлгэрсэн нэг арга гэвэл олонлогийг элементүүдийг шинжээр нь тоймлон өгөх (далд) арга юм. Энэ аргаар бол авч үзэж буй олонлогийн л бүх элементүүдийг тодорхойлох шинжийг заадаг юм. Жишээ нь «танай ангийн бүх онцчуудын олонлог» (энэ нь дээр авч үзсэн A олонлог ч байж мэднэ) $0 < x \leq 5$ байх бүх бүхэл тоонуудын олонлог (энэ нь B олонлог байна), эсвэл «Москвын амьтны хүрээлэн дэх бүх араатнуудын олонлог» гэж ярьж болно. Ялангуяа, бүх бүхэл тоонуудын олонлог «1 талбайтай бүх гурвалжнынуудын олонлог» мэтийн төгсгөлгүй олонлогийг ялгахад олонлогийг шинжээр нь өгөх арга нь маш тохиромжтой. Төгсгөлгүй олонлогийг зөвхөн энэ аргаар л өгч болдгийг бид дээр тэмдэглэсэн.

Олонлогийг шинжээр нь өгөх арга нь олонлогуудыг математик логикууд судалдаг хэллэгүүдтэй холбодог. Энэ аргаар бол юмсын ямар нэг олонлогийг аваад (жишээ нь танай ангийн сурагчдын олонлог, эсвэл бүхэл тоонуудын олонлог) дараа нь зөвхөн манай авч үзэж буй олонлогийн бүх элементүүд хангаж байх тэр хэллэгийг томъёолно. Тухайлбал бид зөвхөн танай ангийн сурагчдын олонлогийг сонирхож байгаа бол тийм хэллэгүүд гэвэл: «тэр онц сурлагатай», «тэр шатар тог-

тог», «тэр нэгдүгээр эгнээнд суудаг», «түүнийг Андрей гэдэг» гэх мэт. Авч үзэж буй универсал олонлогийн (сурагчдын олонлог, тоонуудын олонлог гэх мэт) онц a хэллэгийн агуулгыг тодорхойлж буй чанарыг илгэж байгаа бүх элементүүдээс тогтох A олонлогийг өгдөгсөн хэллэгийн үнэний олонлог гэдэг (28 дугаар зураг).



28 дугаар зураг

Үүгээр бид олонлог ба хэллэгийн хооронд «хоёр талт холбоог» тогтоолоо: олонлог бүр ямар нэг хэллэгээр тодорхойлогдоно (олонлогийн элементүүдийг илгээх арга). Жишээ нь «тэр-Саша, эсвэл Сеня, эсвэл Миша, эсвэл Катя» харин хэллэг бүрт энэ хэллэгийн үнэний олонлог гэгдэх тодорхой олонлог харгалзана. Ингэхдээ ямарч хэллэгийн хувьд энэ хэллэгт ярьж буй бүх элементүүдийг агуулсан универсал I олонлогийг ямагт зааж өгөх болно. Энэ чухал нөхцөл хэллэг гэсэн ойлголтыг тайлбарлах боломж олгоно. Үнэн эсвэл худал нь шүүс болох (авч үзэж буй универсал олонлогийн тодорхой элементэд хэрэглэгд) хүүрнэх өгүүлбэрийг хэллэг гэж үзнэ. Тухайлбал «тэр хоёр толгойтой ба арван зургаан гартай», эсвэл $2 \times 3 = 6$ нь хэллэг болно.

Үүний хоёр дахь нь универсал I олонлогийн сонголтоос ерээсээ хамгаарахгүй, харин «Майн нэгэн мандтугай!» гэсэн уриа, эсвэл «ёох» гэсэн аялга уг нь мэдээж хэллэг болохгүй.

1 Бид хэллэгүүдийг латиний жижиг үсгээр түүнд харгалзах үнэний олонлогийг латини том үсгээр тэмдэг лэнэ.

Хэллэгийн тодорхойлж буй олонлогийг л бид сонирхох тул a ба b хэллэгийн харгалзах үнэний олонлог нь тэнцүү бол тийм хоёр хэллэгийг ялгахгүй, адил гэж үзнэ. a , b хоёр хэллэг адил (жишээ нь: "тэр онц сурлагатан" ба "тэр зөвхөн онц үнэлэлт авдаг" эсвэл "сондгой тоо" ба x тоог 2-т хуваахад 1 үлдэнэ") бол $a = b$ гэж бичих болно.

I олонлогийн ямар элементийг авч үзэв гэдгээс үл хамааран ямагт үнэн байдаг хэллэгүүдийг адилтгал үнэн (буюу агуулгагүй) хэллэгүүд гэх ба тэдгээрийн бүтцийг адил гэж тооцно. Жишээ нь $2 \times 3 = 6$, "тэр (танай ангийн сурагч), хүү буюу охин", түүний (сурагчийн) өндөр 3 м-ээс хэтрэхгүй" гэх мэт хэллэгүүд адилтгал үнэн хэллэгүүд байна. Бүх адилтгал үнэн хэллэгүүдийг i үсгээр тэмдэглэнэ. Бүх адилтгал хуудал (харшлал) хэллэгүүдийг (хэзээ ч үнэн байхгүй өөрөөр хэлбэл үнэний олонлог нь хоосон олонлог байдаг хэллэгүүдийг бас адил гэж тооцоод 0 үсгээр тэмдэглэнэ. Жишээ нь $2 \times 2 = 6$, "тэр (танай ангийн сурагч) нисэж чадна", "түүний өндөр 4 м-ээс илүү" "тэр (тоо) 3-аас их ба 2-оос бага".

Олонлог ба хэллэгийн хоорондох энэ холбоо олонлогийн алгебр дээр үзсэн үйлдлүүдтэй адил нэртөрийн өвөрмөц алгебрийн үйлдлүүдийг хэллэгүүд дээр тодорхойлох боломж олгож байна.

Тухайлбаас a ба b хэллэгийн нийлбэр гэж үнэний олонлог нь a хэллэгийн үнэний олонлог A ба b хэллэгийн үнэний олонлог B -ийн нийлбэртэн давхцах тийм хэллэгийг хэлнэ. Энэ хэллэгийг $a + b$ тэмдгээр тэмдэглэхээр тохирьё. Хоёр олонлогийн нийлбэр нь уг хоёр олонлогт орж буй бүх элементүүдийн нэгдэл байдаг. Тэгвэл a ба b хэллэгийн нийлбэр нь " a буюу b " гэсэн хэллэг байна, энд «буюу» гэдэг холбоос үг нь эсвэл a хэллэг, үнэн, эсвэл b хэллэг үнэн эсвэл энэ хоёр хэллэг хоёулаа зэрэг үнэн гэдгийг заана.

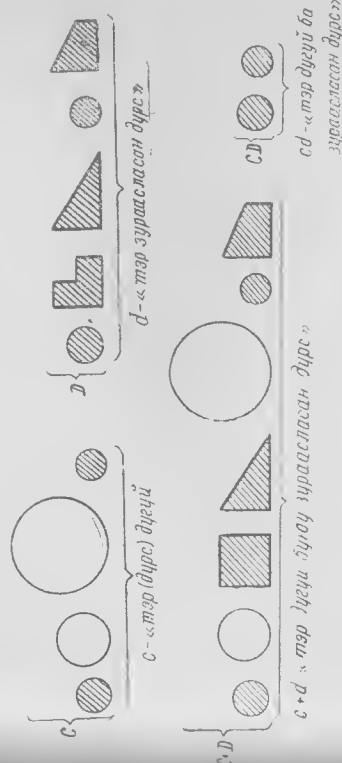
Жишээ нь a нь "тэр шатар тоглож чадна" гэсэн хэллэг ба танай ангийн энэ хэллэгт харгалзах үнэний олонлог нь

1 Энд тэнцүүгийн тэмдэг нь хоёр хэллэг адил утгатай болохыг заана орч.

2 Математик логикт a ба b хэллэгийн нийлбэрийг тэдгээрийн дизъюнк гэж нэрлэх ба $a \vee b$ тэмдгээр тэмдэглэдэг.

$A = \{\text{Саша, Сема, Миша, Андрияша, Катя, Шура, Лена}\}$ харин b нь "тэр даам тоглож чадна" гэсэн хэллэг ба гүүний үнэний олонлог нь

$B = \{\text{Саша, Миша, Петя, Игорь, Катя, Света}\}$ бол $a + b$ нь {тэр шатар тоглож чаддаг буюу тэр даам тоглож чаддаг} (товчоор "тэр шатар буюу даам тоглож чаддаг") гэсэн хэллэг болох ба энэ хэллэгт харгалзах үнэний олонлог нь $A + B = \{\text{Саша, Сема, Миша, Андрияша, Петя, Игорь, Катя, Шура, Лена, Света}\}$ болно.



29 дүгээр зураг

Хэрэв универсал олонлог нь 29 дүгээр зураг дээрх дүрс c нь "тэр (дүрс) дугуй" d нь "тэр зурааслагдсан дүрс" гэсэн хэллэгүүд бол $c + d$ нь "тэр дүрс дугуй буюу зурааслагдсан" гэсэн хэллэг болно (29 дүгээр зураг).

Үүний адилаар A ба B үнэний олонлогтой a ба b хэллэгийн үржвэр гэж үнэний олонлог нь AB (AB -гийн огтлолол)-тэй давхцах тийм хэллэгийг хэлнэ!

Гэтэл A , B олонлогийн үржвэр AB нь A, B олонлогт хоёуланд нь орох зөвхөн тийм элементүүдээс тогтдог билээ, ниймд a, b хэллэгийн үржвэр ab нь " a ба b хэллэгийн логикт $a \wedge b$ тэмдгээр тэмдэглэдэг. (Үүнийг A ба B олонлогийн үржвэр $A \cap B$ -гэй жиш)

ба в" гэсэн хэллэг байх ба энд "ба" гэдэг холбоос үн нь а, b хоёр хэллэг хоёул үнэн байх ёстойг заана.

Жишээ нь а, в хэллэгүүд нь танай ангийн сурагчий тай холбогдох дээр авч үзсэн хэллэгүүд бол ав нь "тэр шатар ба даам тоглож чадна" гэсэн хэллэг болох ба түүний үнэний олонлог нь $AB = \{\text{Саха Миня Катя}\}$ болно.

Хэрэв с, d нь "тэр дүрс дугуй" "тэр дүрс зураас" магдсан" гэсэн 29 дүгээр зураг) хоёр хэллэг бол cd нь "тэр дүрс дугуй ба зурааслагдсан" гэсэн хэллэг болно.

Олонлог ба хэллэгийн хоорондын холбоо нь олонлогийн алгебрын бүх дүрмийг хэллэг дээр шилжүүлэх бололцоо олгож байна:

$$a + b = b + a, ab = ba$$

хэллэгийн алгебрын байр солих хуулиуд

$$(a + b) + c = a + (b + c) (ab)c = a(bc)$$

хэллэгийн алгебрын бүлэглэх хуулиуд

$$(a + b)c = ac + bc \quad ab + c = (a + c)(b + c)$$

хэллэгийн алгебрын хаалт нээх хуулиуд

$$a + a = a, aa = a$$

хэллэгийн алгебрын идемпотент хуулиуд

Цаашилбал, i-нь адилтгал үнэн хэллэг o-нь адилтгал хуудад хэллэг бол ямарваа а хэллэгийн хувьд ямагт

$$a + o = a \quad ai = a, a + i = i \quad ao = o$$

байна. Жишээ нь "тэр онц сурлагатай буюу тэр хоёр толгойтой" гэсэн хэллэг нь "тэр онц сурлагатай" гэсэн хэллэгтэй адил харин "тэр сэлж чаддаг ба тэр 200-гаас бага настай" гэсэн хэллэг нь "тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгтэй адил.

Дээр хэлсэн хуулиудыг математик логикийн номуудад дараахь хэлбэрээр бичдэг. Үүнд:

$$\begin{aligned} a \vee b &= b \vee a & a \wedge b &= b \wedge a \\ (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) & (a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c) \\ (a \vee b) \wedge c &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) & (a \wedge b) \vee c &= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ a \vee a &= a & a \wedge a &= a \\ a \wedge i &= a & a \wedge i &= i \quad a \wedge 0 = 0 \end{aligned}$$

Чмар замаар олонлогийн алгебрын дүрмээс хэллэгийн алгебрын дүрм гаргадгийг нэг жишээн дээр, тухайлбал 2 дугаар хаалт нээх хууль дээр, авч үзье. Хоёр хэллэгийн нийлбэрийн үнэний олонлог нь хоёр хэллэгийн үнэний олонлогийн нийлбэртэй тэнцүү, харин хоёр хэллэгийн үржвэрийн үнэний олонлог нь үнэний олонлогийн үржвэртэй тэнцүү гэдгээ $ab + c$ гэсэн нийлмэл хэллэг "а ба b" буюу c-ийн үнэний олонлог нь $AB + C$ байна, энд А, В, С нь харгалзан а, b, c хэллэгийн үнэний олонлог юм. Үүний адилаар $(a + c)(b + c)$ нийлмэл хэллэгийн үнэний олонлог нь $(A + C)(B + C)$ болно. Гэтэл 2 дугаар хаалт нээх хуулиар $AB + C = (A + C)(B + C)$ байна. Энэ нь $ab + c = (a + c)(b + c)$ хоёр хэллэгийн үнэний олонлог давхцахыг илэрүүлж байна.

Энэ үнэл эндээс $ab + c, (a + c)(b + c)$ хэллэгүүд адил гэж гарч байна.

1 дүгээр зүйлд дурдсан "тэр шатар ба даам тоглож чадна, буюу сэлж чадна" "тэр шатар тоглож чаддаг буюу сэлж чаддаг, мөн тэр даам тоглож чаддаг буюу сэлж чаддаг" гэсэн хэллэгүүд адил утгатай байдгийг харуулсан, өөрөөр хэлбэл $ab + c = (a + c)(b + c)$ юм. Энд а, b, c нь "тэр шатар тоглож чадна" "тэр даам тоглож чадна", "тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгүүд юм.

Олонлогийн нэмэх ба үржүүлэх үйлдлийн хамтаар мөн "зураас" үйлдлийг хэллэгийн алгебрт шилжүүлэн авчирч болно. Ингээд үнэний олонлог нь А байдаг тийм хэллэгийг а гэнэ. Энд А нь а хэллэгийн үнэний олонлог. Өөрөөр хэлбэл универсал I-ийн олонлог А олонлогт орлоггүй элементүүд зөвхөн тэд л а нөхцөлийг хангана. а-нөхцөлийг хангадаггүй элементүүд л а нөхцөлийг хангана). Жишээ нь а нь "тэр муу дүн авдаг" гэсэн хэллэг бол а нь "тэр муу дүн авдаггүй" гэсэн хэллэг болно. Универсал олонлог I нь 28 дугаар зураг дээрхи дүрсүүдээс тогтдог ба b нь "тэр (дүрс) гурвалжин" гэсэн хэллэг бол b нь "тэр гурвалжин биш" гэсэн хэллэг болно (30 дугаар зураг). Ерөнхийдөө а хэллэг нь "а биш" гэсэн утгатай. Иймд хэллэгийн алгебрийн "зураас" үйлдлийг үгүйсгэл гэж нэрлэдэг.



В - «тэр (дүрс) гурвалжин биш»

30 дугаар зураг

Одоо үгүйсгэлийн үйлдэлтэй холбогдсон хэллэгийн алгебрийн дүрмүүдийг тоочвол:

$$\overline{a} = a, a + a = i \text{ ба } a\overline{a} = 0$$

$$\overline{0} = i \text{ ба } \overline{i} = 0$$

$$a + b = \overline{ab} \text{ ба } \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$

Үнэндээ адилтгал худал хэллэгийн үгүйсгэл нь (жишээ нь 2×2 нь 5-тай тэнцүү биш) буюу "энэ сурагч хоёр толгойтой биш") ямагт адилтгал үнэн хэллэг байна. Харин адилтгал үнэн (энэ сурагч 120-аас бага настай) хэллэгийн үгүйсгэл нь (энэ сурагч 120-аас их настай) адилтгал худал хэллэг байна. Бусад бүх хуудлыг хялбархан шалгаж болно (үүнийг хийцгээ).

Гэвч тэдгээрийг тусгай аргаар шалгах гэхийн хэрэггүй, учир нь тэд олонлогийн алгебрийн харгалзах дүрмүүдээс гарна.¹

Дасгалууд

1. Адилтгал үнэн хэллэгийн гурав, адилтгал худал хоёр хэллэгийн жишээ гарга.

2. a нь а) $2 \times 2 = 4$

б) «тэр-хүү»

в) «заан—шавьж мөн»

г) "тэр нисэж чадна" гэсэн хэллэг байг. Тэгвэл a нь ямар хэллэгүүд байх вэ? Энэ нь адилтгал үнэн хэллэг мөн үү? Адилтгал худал хэллэг мөн үү?

3. a -нь "тэр шатар тоглож чална" b нь "тэр даам тоглож чадна" гэсэн хэллэгүүд бол а) $a + b$; б) ab ; в) $\overline{a} + \overline{b}$; г) $\overline{a} + \overline{b}$; д) $\overline{a} + \overline{b}$; е) \overline{ab} ; ж) \overline{ab} ; з) \overline{ab} хэллэгүүд нь ямар утгатай вэ?

4. a нь "тэр (сурагч) онц сурлагатан" b нь "тэр хар үстэй хүн" c нь "тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгүүд бол а) $(a + b)c$ ба $ac + bc$ б) $ab + c$ ба $(a + c)(b + c)$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?

5. a нь "тэр (натурал) тоо тэгш"

b нь "тэр тоо энгийн" гэсэн хэллэгүүд бол а) ab ; б) $\overline{a} + \overline{b}$; в) \overline{ab} ; г) ab ; д) $a + b$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?

Энэ хэллэгүүдийн үнэний олонлог нь юу вэ?

6. a нь "тэр сурагч математикийн дугуйланд орошлог" b нь "тэр хорт дуулдаг" гэсэн хэллэгүүд бол

а) $\overline{a} + \overline{b}$ ба \overline{ab}

в) ab ба $a + b$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?

7. 1) $\overline{a} + \overline{b}$ ба ab хэллэгүүдийн үнэний олонлог нь харгалзан $\overline{A+B}$ ба \overline{AB} болно, гэтэл $\overline{A+B} = \overline{AB}$, тэгвэл хэллэгүүдийн тэнцэгэлийн тодорхойлолтоор

$$\overline{a + b} = \overline{ab} \text{ байна.}$$

5 §. Сэтгэлгээний хуулиуд ба гаргалгааны дүрмүүд

Одоо ямар учраас Дж Буль, энэхүү номонд авч үзсэн «ер бусийн алгебрууд»-ыг бүтээсэн өөрийн бүтээлээ "Сэтгэлгээний хуулиудын шинжилгээ" гэж нэрлэсний учрыг тайлбарлая. Үнэндээ хэллэгийн алгебр нь хүний сэтгэхүйн үйл явцдаа удирдлага болгодог дүрмүүдтэй шууд холбоотой байна. Учир нь: бидний дээр тодорхойлсон хэллэгийн нийлбэр ба үржвэр нь "буюу", "ба" гэсэн логик холбоосуудыг тэмдэглэж байна. Харин "зураас" үйлдэл нь үгүйсгэлийн утгыг илэрхийлнэ, гэгэл хэллэгийн алгебрын хуулиуд нь бүх хүн удирдлага болгодог логик үйлдлийн үндсэн чанарыг тодорхойлдог. Зөвхөн цөөн тооны хүмүүс эдгээр чанарыг сэтгэлгээний математикийн хууль гэж ойлгодог боловч, харин тэдгээрийг бүр бага хүүхдүүд ч чөлөөтэй ашигладаг. Үнэндээ "тэр хурдан гүйдэг ба өндөр харайдаг" гэж хэлэх нь "тэр өндөр харайдаг ба хурдан гүйдэг" гэж хэлсэнтэй яг адил гэдэгт хэн ч эргэлзэхгүй нь мэдээж, өөрөөр хэлбэл av ба va хэллэгүүд нь нэгэн адил утгатай, өөр хоорондоо "тэнцүү" гэдгийг (үүнийг зарим нь ухамсарладаггүй ч гэсэн) бүгд мэднэ. Өзөрмөц "алгебрын дүрмийн" хэлбэртэйгээр логикийн хуулиудад математик тайлбарлал хийсэн Дж Булийн шинжилгээ орчин үед олны сонирхлыг яагаад их татах болсны учрыг тайлбарлая. Сүүлийн жилүүдэд үйлдвэрлэлийг удирдах, тээврийн хөдөлгөөний схемийг зохиох, математикийн бодлого бодох, нэг хэлнээс нөгөө хэлэнд орчуулах, эдийн засгийг төлөвлөх зэрэг урьд нь зөвхөн ухамсарт хүний хийж байсан үйлдлүүдийг электротехникин машинаар гүйцэтгүүлэх болсныг тэр ч байтугай "электрон машинтай шатар тоглох" болжээ. Тэгвэл машинын энэ бүхэнд "сургахын" тулд хүний бүтээсэн энэ «ухаант» машинууд заавал дагаж мөрддөг «тоглоомын тэр дүрмүүдийг» сэтгэлгээний тэр хуулиудыг" тов тодорхой томъёолох шаардлага зүй ёсоор гарна.

Хүн өөрөө логикийн дүрмүүдийг зөнгөөрөө мөрддөг бол машины хувьд энэ дүрмүүдийг математикийн машин "ойгож" чадах ганц "хэл" болох математикийн хэлч дээр л тов тодорхой томъёолох хэрэгтэй.¹

Уг "сэтгэлгээний хуулиуддаа" эргэж орёе. Үгүйн гэд гэгдэх логик үйлдэлтэй холбогдсон дүрмүүд нь нэлээд сонирхолтой бөгөөд, тэдний ихэнх нь логикийн тусгай нэртэй байдаг Жишээ нь:

$$a + \bar{a} = i$$

Дүрэм нь гуравдахыг үгүйсгэх хууль нэртэй. Энэ нь эсвэл a хэллэг хүчинтэй, эсвэл \bar{a} хэллэг хүчинтэй харин гуравдах нь байж болохгүй, иймд $a + a\bar{a}$ хэллэг өөрөөр хэлбэл " a буюу a биш" нь ямагт үнэн хэллэг байна. Жишээ нь "Ленинград хотын 12-р сургуулийн 7 а ангийн тэр өндөр сурагчийн" тухай бид юу ч мэдэхгүй мөртөө энэ сурагч "эсвэл онц сурлагатан, эсвэл онц сурлагатан биш" юмуу тэр "эсвэл шатар тоглож чадна, эсвэл шатар тоглож чадахгүй" гэж итгэлтэйгээр батлан хэлж чадна.

$$aa = 0$$

Дүрэм нь **харшлалын** (зерчлийн) хууль нэртэй. Энэ хууль a , \bar{a} хоёр хэллэг нэгэн зэрэг хэзээ ч хүчинтэй байж чадахгүйг батална. Өөрөөр хэлбэл энэ хоёр хэллэгийн үржвэр ямагт худал гэдгийг батална. Жишээ нь ямар нэг сурагч онц сурлагатан мөн бол түүний хувьд "тэр онц сурлагатан биш" гэсэн хэллэг мэдээж худал байна. Мөн n тоо бүхэл тэгш бол түүний хувьд "тэр сондгой тоо" гэсэн хэллэг худал байна.

$\bar{a} = a$ дүрмийг **давхар үгүйсгэлийн** хууль гэдэг. Энэ хууль нь ямар нэг нотолгооны давхар үгүйсгэл нь анхны нотолгоотой адил гэдгийг батална. Тэгш тоо "гэсэн бүхэл тоонд холбогдох хэллэгийн үгүйсгэл нь "тэгш тоо биш" гэсэн хэллэг болно, үүний үгүйсгэл "тэгш тоо биш гэдэг нь биш" нь биднийг тэр тоо тэгш болох тухай анхны нотолгоонд хүргэж байна. Мөн үү-

¹ Хэллэгийн элементар алгебрыг энэ номын хэмжээгээр судалснаар, тооны машиныг бүтээх юмуу, бодлогыг электронт машин болгож чаддаг хэлэн дээр томъёолж чаддаг боллоо гэж бодож харахан болохгүй юм шүү?

ний адил "тэр үүрэгтэй сурдаг" гэсэн хэллэгийн үгүйсгэл нь "тэр үүрэггүй сурдаггүй" гэсэн хэллэг ба тэр нь анхны хэллэгтэй адил чанартай юм.

Үгээр томъёолоход нилээд төвөгтэй хэллэг үүнийн үнд Де Морганы

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \quad \text{ба} \quad \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

дүрмүүд нэлээд ач холбогдолтой юм (дасгал 1-ийг үзээрэй).

Ер нь $(a + b)c = ac + bc$ ба $ab + c = (a + c)(b + c)$ хяналт нээх эсвэл $a + a = a$, $aa = a$ идемпотент хууль гэх мэт хэллэгийн алгебрийн бусад бүх хуулиуд нь мэдэгдэж буй дүгнэлтүүдээс шинэ оюуны дүгнэлтүүд гаргах "сэтгэлгээний тодорхой хууль", логик дүрэм болно.

Логик \Rightarrow харьцаанд холбогдсон дүрмүүд онцгой үүрэгтэй. Одоо хүртэл бид энэ харьцааг авч үзээгүй. (олонлог ба хэллэгийн хооронд дээр тогтоосон "хоёр хяналт холбоо" нь олонлогийн алгебрийн \subseteq харьцааг (агуулагдлын харьцаа) хэллэгийн алгебарт хялбархан шилжүүлэх бололцоо олгож байна. *Хэрэв b хэллэгийн үнэний олонлог B нь a хэллэгийн үнэний олонлог A -г агуулж байвал b хэллэг нь a хэллэгээс гарна* (эсвэл b нь a -ийн мөрдлөг) гэж хэлэх ба

$$a \Rightarrow b$$

гэж бичих болно.

Жишээ нь, танай ангийн онцчуудын олонлог B нь бүх үүрэгтэй сурагчдын олонлогт агуулагдах нь илэрхий, тэгвэл "тэр (танай ангийн сурагч) бүх хичээлдээ үүрэгтэй сурдаг" гэсэн b хэллэг нь "тэр онц-сурлагатан" гэсэн a хэллэгийн мөрдлөгөө болно. Мөн 6-д хуваагдах тоонуудын (натурал тоо) $A_6 = \{6, 12, 18, \dots\}$ олонлог $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ тэгш тоонуудын олонлогт агуулагдана. Иймд «тэр (тоо) тэгш» хэллэг нь "тэр 6-д хуваагдана" гэсэн хэллэгийн мөрдлөгөө болно!

¹ $a \Rightarrow b$ бол a хэллэгийг b -ийн хүрэмжтэй нөхцөл (тэр онц сурагчтан байхын тулд тэр сурагч бүх хичээлдээ үүрэгтэй байхад хүрэлцээтэй), харин b хэллэгийг a -ийн зайлшгүй нөхцөл гэдэг (онц сурагчтан байхын тулд бүх хичээлдээ үүрэгтэй байх нь зайлшгүй).

a, b хоёр хэллэг $a \Rightarrow b$ харьцаагаар холбогдсон гэдгийг тогтоохыг ихэвчлэн *гаргалгаа* гэдэг. Энэ үед a хэллэгийг *нөхцөл*, энэ нөхцөлөөс мөрдөгдөж буй b хэллэгийг *дүгнэлт* гэдэг. Бид шинжлэх ухаан болоо практик амьдрал ахуйдаа гаргалгаа гаргахтай тул олон тааралддаг. Гаргалгаа ихэнхдээ математикийн теоремын баталгаатай ижил хэлбэрийн шинж тэмдэгтэй байдаг. Жишээлэхэд: теоремын b нөхцөлөөс (жиншээ нь MNP гурвалжны P өнцөг нь тэгш) түүний a дүгнэлтийг ($\angle MP^2 + \angle NP^2 = \angle MN^2$) гаргах шаардлагатай байна (31 дүгээр зураг). Гаргалгаа хийхдээ теорем батлахдаа \supset харьцааны үндсэн чанаруудыг системтэйгээр (тайлагналыг) ашигладаг.

$$a \Rightarrow a;$$

$$a \Rightarrow b \text{ ба } b \Rightarrow a \text{ бол } a = b;$$

$$a \Rightarrow b \text{ ба } b \Rightarrow c \text{ бол } a \Rightarrow c;$$

Ямарваа a хэллэгийн хувьд

$$a \Rightarrow i \text{ ба } o \Rightarrow a$$

Ямарваа a, b хэллэгийн хувьд

$$a \Rightarrow a + b, ab \Rightarrow a$$

$$a \Rightarrow b \text{ бол } b \Rightarrow a$$

31 дүгээр зураг



Жишээ нь: Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд нь огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагдах бол (a хэллэг) энэ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байна (b хэллэг)². Нөгөө талаас параллелограммын эсрэг өнцгүүд нь тэнцүү байдаг (хэллэг c). Тийнхүү $b \Rightarrow a$ ба $a \Rightarrow c$ тул $b \Rightarrow c$ болно, өөрөөр хэлбэл: дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд нь огтлолцлын цэгээр хагаслан хуваагдаж байвал, түүний эсрэг өнцгүүд нь тэнцүү байна.

$a \Rightarrow b$ бол $b \Rightarrow a$ байна гэсэн дүрмийг яаж ашиглахыг авч үзье. Энэ дүрэм нь эсрэгээс нь батлах гэг-

¹ Дүрэм: $a \Rightarrow b$ ба $b \Rightarrow a$ бол $a = b$ ба үүнийг b нь a -ийн зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл бол a ба b хэллэгүүд адил чанартай (бидний үзэж байгаагаар бол адил, тэнцүү юм).

² Энэ тохиолд бүр $a \Rightarrow b$ ба $b \Rightarrow a$, өөрөөр хэлбэл $a = b$ болно.

эх баталгааны аргын үндэс болдог: Бид $b \Rightarrow a$ харьцааг батлах ёстой байг. Өөрөөр хэлбэл a хэллэгээс b хэллэг мөрдөж гарна гэе. b хүчингүй байвал a ч мөн хүчингүй байна гэдгийг батлах нь хялбархан байх явдал олонтоо тохиолддог, өөрөөр хэлбэл " b биш" (\bar{b} хэллэг) хэллэгээс " a биш" (\bar{a} хэллэг) хэллэг гарна. Жишээ авъя 3-аас их бүхэл тоо n анхны тоо бол (a хэллэг) n нь $6k \pm 1$ (k -бүхэл) хэлбэртэй байна өөрөөр хэлбэл n тоог 6-д хуваахад +1 юмуу -1 үлдэгдэлтэй (b хэллэг) $\langle b \Rightarrow a \text{ бол } a \Rightarrow b \rangle$ дүрмийг ашигласны үүнийг шууд батлах нь маш хүнд юм. Иймд эсрэгээс нь батлахыг хичээе. \bar{b} хэллэг хүчинтэй гэе, өөрөөр хэлбэл n тоо (3 -аас их бүхэл) нь $6k \pm 1$ хэлбэртэй биш гэе. Гэтэл ямарч бүхэл тоо n -ийг 6-д хуваахад үлдэгдэл нь эсвэл 0, эсвэл 1, эсвэл 2, эсвэл 3, эсвэл 4, эсвэл 5 (энэ нь-1 гэсэн үг) байдаг тул \bar{b} таамаглал нь n тоог 6-д хуваахад эсвэл 0, эсвэл 2, эсвэл 3, эсвэл 4 гэсэн үлдэгдэл гарна гэсэн үг юм. Эндээс 0 үлдэгдэлтэй тоо өөрөөр хэлбэл 6-д хуваагддаг тоо нь яагаад чанхны тоо байж болохгүй. Мөн $n > 3$ тоог 6-д хуваахад 2 эсвэл 4 үлдэгдэл гардаг бол тэгш тоо байна, иймд анхны тоо биш, 6-д хуваахад 3 үлдэгдэл гардаг бол 3-т хуваагдана. Иймд бас анхны тоо биш. Ийнхүү \bar{b} -аас a гарч байна ($\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$) Эндээс $b \Rightarrow a$ гэж гарах тул бидний батлах зүйл батлагдлаа¹.

Дасгалууд

1. Хэллэгийн алгебрийн $a + b = ab$ ба $ab = a + b$ гэсэн де Моргани дүрмүүдийг үгээр томъёол.

2. а) гуравлахыг үгүйсгэх

б) харшлалын

3. 58-д дурлагдсан хэллэгийн \supset харьцааны чанаруудыг тайлбарласан нэг нэг жишээ гарга.

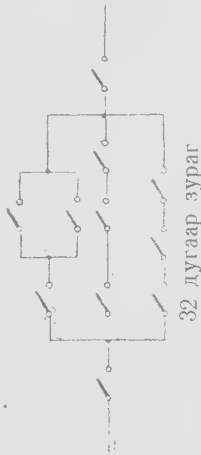
4. Өөрийн мэдэх эсрэгээс нь батлах баталгааны жишээг сана, түүнийг символ (тэмдэглэл) ашиглан бич.

5. $a = > b$ байг. a, b хэллэгийн нийлбэр $a + b$ ба үржвэр ab хэллэгүүдийг хялбарчил.

Бүр нарийн яривал $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ гэсэн харьцаанаас $\overline{\overline{b}} \Rightarrow \overline{\overline{a}}$ эсвэл $b \Rightarrow a$ гэтэл $\overline{\overline{a}} = a$ ба $\overline{\overline{b}} = b$ тул $b \Rightarrow a$ болно.

6§. Хэллэг ба залгуурын схем

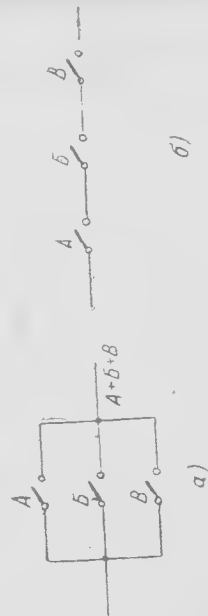
Чамд бүр ч гайхмаар санагдаж магадгүй Булийн алгебрийн нэг жишээг энэ товхимолын эцэст дурдан Манай алгебрийн элементүүд нь бүх боломжит залгуурын (контактны) схемүүд, өөрөөр хэлбэл залгуурын унтраалгуудаар таслагдсан цахилгаан хэлхээнүүд байна. 32 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн шиг тийм хэл хэ эний тусгай хэсгүүдийг бид цагаан толгойн том үс



32 дугаар зураг

гүүдээр тэмдэглэе. Тэрхүү тусгай хэсгүүд бидний одоогийн авч үзэх гэж буй өвөрмөц алгебрийн элементүүд болно.

Нэгэнт цахилгаан хэлхээний хэсгийн ганц үүрэг нь цахилгаан гүйдлийг дамжуулах явдал учраас энэ үүргээрээ яг адил байдаг хэлхээний хоёр хэсгийг өөрөөр хэлбэл нэгэн адил унтраалгуудтай бүх унтраалгуудын нэгэн адил байдалд ("битүүрсэн", "битүүрээгүй") гүйдлийг дамжуулах юмуу дамжуулахгүй нь нэгэн адил байдаг тийм хэлхээнүүдийг ялгахгүй "тэнцүү" гэж тооцно. Хэлхээний A, B хоёр хэсгийн *нийлбэр* $A + B$ гэж тэдгээрийн *параллель* (зэрэгцээ) залгасны үр дүнг хэлнэ. Харин хэлхээний A, B хоёр хэсгийн *үржвэр* AB гэж тэдгээрийн угсраа залгасныг үр дүнг хэлнэ (33 дугаар б зураг дээр хэлхээний A, B хэсгүүд нь нэг нэг залгуурыг агуулжээ). Цахилгаан хэлхээний



33 дугаар зураг

0)

хэсгүүдийн ийнхүү тодорхойлсон нэмэх, үржүүлэх үйлдэл нь

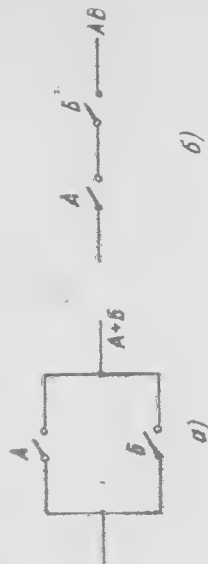
$$A + B = B + A, AB = BA$$

байр солих

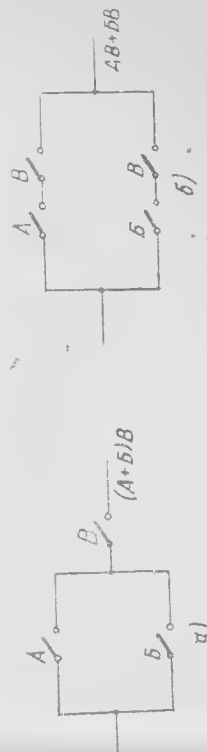
$$(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$$

бүлэглэх

(34 а, б зураг дээр гурван залгуурын "гурвалсын нийлбэр" $A + B + C$ ба тэдгээр "гурвалсан үржвэр" $AB + C$ (үрсэлжээ) хууль биелэх нь илэрхий. Тэд бас $A + A = A$ идемпотент хуулиудыг хангана, учир нь хоёр адилхан залгуурыг зэрэгцээ ба угсраа залгах нь нэг залгуур шиг ижил үр дүнг өгнө. Манай "залгуурын схемийн алгебр" $(A + B)C = AC + BC$ ба $A(B + C) = AB + AC$ гэсэн хаалт нээх хууль биелдгийг шалгах нь арай төвөгтэй юм. Гэвч 35 ба 36 дугаар зургаас энэ хоёр хууль хүчинтэй болохыг харж болно.

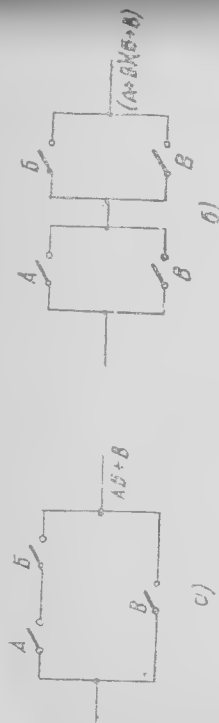


34 дугаар зураг



35 дугаар зураг

35 а дээрхи зураг схем нь зураг 35 б дээрхи схемтэй "тэнцүү" харин 36 а дээрхи схем нь 36 б дээрхи схемтэй "тэнцүү".



36 дугаар зураг

И үсгээр үргэлж битүү байх (гарнагдсан) залгуурыг (37 дугаар зураг а) о үсгээр салгагдсан залгуурыг (сүлжээний тасархай; 37 дугаар зураг б) тэмдэглэе. Тэгвэл $A+O=A$ ба $AI=I$ (38 дугаар зураг) $A+I=I$ ба $AO=O$ (39 дүгээр зураг) биелэх нь илэрхий. Манай Булийн алгебрийн I ба O "онцгой хоёр элемент"ийн үүргийг U ба O залгуурууд гүйцэтгэж байна.



37 дугаар зураг



38 дугаар зураг

A ба \bar{A} үсгээр, A залгуур битүүрсэн бол A залгуур салгагдсан байх тийм хос залгуурыг тэмдэглэе. Тийм хосыг техникийн хувьд хялбархан хийж болно (40 дүгээр зураг).

$$\bar{\bar{A}}=A, I\bar{I}=O \text{ ба } O\bar{O}=I$$

мөн $A+\bar{A}=I$ ба $A\bar{A}=O$

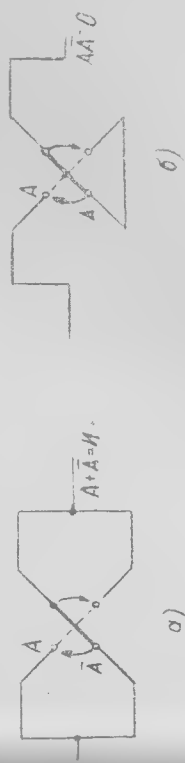
байх нь илэрхий (41 дүгээр зураг а).

$$A+\bar{A}=I \text{ ба } A\bar{A}=O$$

блйх де Морганы дүрэм хүчинтэй боловч шалгахад амаргүй 42а, б зураг дээр $A+B$ ба $A+B$ хэлхээний



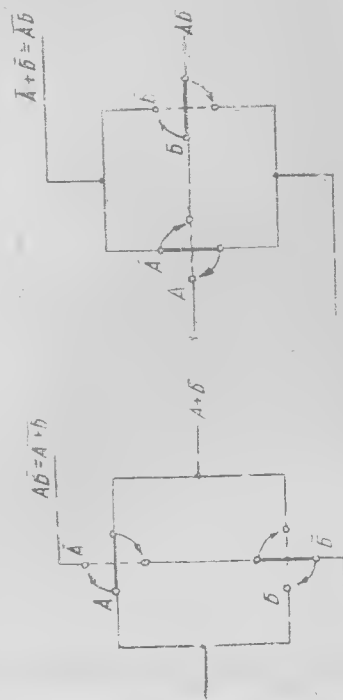
39 дүгээр зураг



40 дүгээр зураг

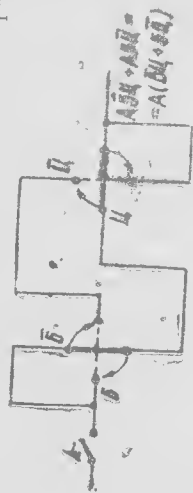
хэсгүүд нь $A+B$ хэлхээ гүйдэл гүйлгэвэл, $A+B$ нь гүйдэл гүйлгэхгүй, мөн урвуу нь биелнэ гэсэн нөхцөлөөр тодорхойлогдсон).

"Залгуурын схемийн алгебр" "хэллэгийн алгебратой" ойр байдаг нь дараахь хоёр утгаар маш үнэтэй юм. Нэгдүгээрт, энэ төсөө нь нийлмэл хэллэгүүдийг цахилгаан хэлхээгээр загварлах боломж олгоно. Жишээ нь $d=abc+abc$ нийлмэл хэллэгийг энд a, b, c -нь "энгийн" хэллэгүүд, нэмэх үржих, "зураас" үйлдлүүд нь

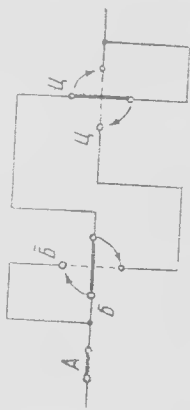


41 дүгээр зураг

"буюу" "ба" үгүйсгэл гэсэн логик холбоосууд авч үзвэл a, b, c хэллэгүүдэд A, B, C залгууруудыг харгалзуулбал, нийлмэл хэллэг d нь 43 дугаар зурагт дүрсэлсэн $D = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$ схемд харгалзана. Ингэвэл a, b, c хэллэгүүд үнэн, c хэллэг худал байхад d хэллэг үнэн эсэхийг шалгахын тулд D схемийн A, B залгууруудыг битүүрүүлж, C залгуурыг салгана (44 дүгээр зураг). Ингэхэд схем D гүйдэл гүйлгэвэл энэ нь үнэн хэллэг d -д харгалзана, өөрөөр хэлбэл d хэллэг үнэн байна.



43 дугаар зураг



44 дүгээр зураг

хэрэв D схем гүйдэл гүйлгэхгүй бол (O схемтэй "тэнцүү"), d хэллэг нь O хэллэгтэй адил, өөрөөр хэлбэл худал байна.

Хоёрдугаарт, логик дүрмийн тусламжтайгаар өгөгдсөн нөхцөлүүдийг хангах залгуурын схемүүдийг зохиох боломж олгоно. Үүнийг бид хоёр жишээн дээр тайлбарлая.

Жишээ 1. Хоёр унтраалганы нэг нь хаалганы хаагууд нөгөө нь орны толгой дээр байхаар нэг цахилгаан чийдэлтэй унтрагчын өрөөний цахилгаан хэлхээний төсөл зохиё. Тэгэхдээ унтраалга бүрийн эргэлт нь нөгөө унтраалгын байдлаас үл хамааран, хэлхээ битүү байсан бол түүнийг салгадаг салаагад байсан бол түүнийг битүүрүүлдэг байг.

Бодолт. Хоёр унтраалгад харгалзах залгууруудыг A, B үсгээр тэмдэглэе. Тэгвэл манай бодлого нь A, B залгууруудын (\overline{A} ба \overline{B} байж ч болно) аль нэгий нь байдлыг өөрчилбөл, бүх хэлхээ C -ийн байдал өөрчлөгдөхөөр (хэлхээ гүйдэл гүйлгэж байсан бол салгана, мөн урвуу нь) тийм хослол (унтрагчын өрөөний цахилгаан хэлхээнд тохирох) C -г зохиоход оршино. Өөрөөр хэлбэл манай бодлого нь ямар нэг a, b хэллэгээс c хослон зохиохдоо, a, b хэллэгийн аль нэгий нь үнэний утгыг эерэгээр өөрчилбөл c хэллэгийн үнэний утга өөрчлөгдөж байхад оршино. Ийм нөхцөлийг хангах c хэллэг нь a, b хэллэгүүд нэгэн зэрэг үнэн, эсвэл худал байхад, үнэн бусад тохиолдолд (a, b хэллэгийн нэг нь үнэн нөгөө нь худал) худал байх явдал юм. Энэ өгүүлбэрт орсон «буюу» холбоос нь: c хэллэг нь хоёр хэллэгийн нийлбэр байж болох юм гэсэн санаа төрүүлж байна. Тэгэхдээ энэ хоёрын нэг нь a ба b хэллэг зэрэг үнэн байхад үнэн, нөгөө нь a ба b хэллэгүүд зэрэг үнэн байхад үнэн байх ёстой. Гэтэл энд орсон «ба» холбоос нь уг нийлбэрийн нэмэгдхүүн бүр нь a ба b хэлбэртэй байна гэсэн дүгнэлтэд хүргэж байна. Тийнхүү

$$c = ab + \overline{a}\overline{b}$$

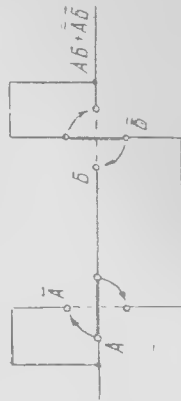
боллоо.

Энэхүү c хэллэг дээр дурдсан нөхцөлийг үнэхээр хангахыг харахад хялбархан.

Одоо хэллэгээс залгуурын схемд нилжвэл бидний сонирхож байгаа цахилгаан хэлхээ C нь

$$C = AB + \overline{A}\overline{B}$$

томъёогоор илэрхийлэгдэнэ. Тийм схемийг хийх нь техникийн хувьд төвөггүй (45 дугаар зураг).



45 дугаар зураг

Жиншээ 2.1 Цахилгаан шатыг удирдах цахилгаан хэлхээний төсөл зохиох хэрэгтэй болог. Хялбарыг бодож давхрын тоог хоёр гэе. Хэлхээ нь хоёр залгууртай байх бөгөөд түүний удирдлага нь цахилгаан шатны бүхээгт байрласан кюп (буулгах товруу) ба нэгдүгээр давхрын цахилгаан шатны хаалганы дэргэдэх товруу (дуудлагын товруу) дарснаар гүйцэтгэгдэнэ. Нэмэлт залгуурууд нь нэг ба хоёрдугаар давхрын цахилгаан шатны хаалгатай, бүхээгний дотоод хаалгатай, мөн бүхээгт яваа зорчигчид даралт учруулах цахилгаан шатны шалтай холбогдсон байна. Цахилгаан шатны доош² явах хөдөлгөөнийг удирдаж байгаа цахилгаан хэлхээ нь бүхээг хоёрдугаар давхарт байхад юмуу эсвэл дараахь нөхцөлүүдэд л залгагдана. Үүнд:

1. Цахилгаан шатны хоёр хаалга ба бүхээгний хаалга хаалттай байсан, бүхээгт байгаа зорчигч буулгах товрууг дарсан байх, эсвэл
2. Цахилгаан шатны хоёр хаалга хаалттай харин бүхээгний (хаалга битүү юмуу залгай), зорчигч бүхээгт байхгүй, доороос хүн дуудлагын товрууг дарсан үе болно.

Бодолт. Хэлхээний залгалтыг тохируулж байгаа залгуурын унтраалгуудыг дараахь маягаар тэмдэглэе. В-бүхээг хоёрдугаар давхарт байх үед л битүүрдэг унтраалга;

D_1, D_2 -1 ба 2 дугаар давхарт цахилгаан шатны хаалга хаагдахад битүүрдэг унтраалгууд,

D_k -бүхээгний хаалгатай холбогдсон үүний адил унтраалгууд П-бүхээгний шалтай холбогдсон зорчигчидт жингээс хамгаарч битүүрдэг унтраалгууд;

K_c ба K_v нь цахилгаан шатны бүхээгийг буулгах товруу ба 1 дүгээр давхрын хаалганы дэргэдэх дуудлагын товруутай холбогдсон унтраалгууд, Бодлогын нөхцөл ёсоор цахилгаан шатны буултыг удирдах эржгүй хэлхээ C_c нь зөвхөн дараахь тохиолдлуудад л салгагдана. (гүйдэл гүйнэ).

¹Энэ жиншээг И. А. Полетаев, Сигнал Сов. радио. 1958 214 тал номоос авав.

²Бид энд зөвхөн цахилгаан шатны доош явах хөдөлгөөнийг удирдаж байгаа хэлхээний байгууламжийг авч үзэж байна, дээш явах үед яг адил хийгдэнэ. (дасгал 6-г хийгээрэй)

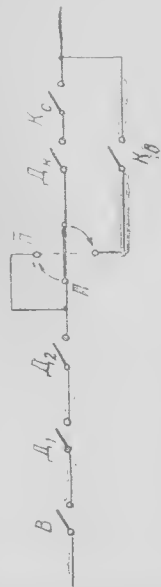
1. залгуур $b, D_1, D_2, D_k, \Pi, K_c$ -ууд битүүрсэн үзвэл

2. залгуур B, D_1, D_2, K_v -үүд битүүрсэн ба D_k битүүрсэн эсвэл салгагдсан, Π -салгагдсан. Логик үйлдэл "и" нь хэллэгүүдийн залгууруудыг үржвэрт, "эсвэл" нь нийлбэрт харгалздагийг бодолцно

$$C_c = BD_1D_2D_k\Pi K_c + BD_1D_2(D_k + \overline{D_k})K_v\Pi$$

болохыг шууд олго.

$D_k + D_k = \Pi$ ба Π залгуурын чанарыг (ямарч A залгуурын хузыд $AU = A$), мөн үржвэрийн байр солих хууль ба хялалт нээх хуулийг ашиглавал уг нлэрхийллийг $C_c = BD_1D_2(\Pi D_k + \Pi K_v)$ гэж хялбарчилж болно. Тийм хэлхээг хийх нь техникийн хувьд төвөггүй (46 дугаар зураг).



46 дугаар зураг

Дасгал

1. Дараахь нийлэмэл хэллэгүүдэд харгалзах залгуурын схемийг дүрсэл

а) $(a + b)(c + d)$;

б) $abc + ab + a$;

в) $abc + abc + abc$;

г) $a + b)(a + b) + ab + ab$.

2. $(a + c)(b + c)(a + d)(b + d)$ ба $ab + cd$

хэллэгүүдэд харгалзах залгуурын схемийг дүрсэлж, элгээр схемүүдийн "тэнцлийг" шалга.

3*. А, Б, В, Г, \overline{A} , \overline{B} , \overline{V} -залгуурууд ч байж болно) залгууртай бөгөөд

а) А, Б, В, Г залгуур бүгдээрээ залгагдсан эсвэл нэг нь ч залгагддаггүй үед битүүрдэг,

б) А, Б, В, Г залгуурууд бүгд биш зөвхөн зарим нь залгагдсан үед л битүүрдэг тийм л хэлхээг байгуул.

4. а) Хороо гурван гишүүнтэй. Хорооны гишүүн бүр санал өгөдөө тодруулг дарна, ихэнх нь санал өгсөн үед л чийдэн асдаг ба хаар санал хураалтын дүнг үзүүлэх цахилгаан хэлхээний төсөл зохино.

б) Дарга ба таван гишүүн бүхий хорооны хувьд дараах нөхцөлд тохирох хэлхээг зохио үүнд: асуудлын тухай ихэнх нь санал өгсөн үед эсвэл санал тэнцүүтээр хуваагдсан боловч асуудлыг талаар дарга санал өгсөн үед ламп асна.

5. * а) гурван үл хамаарах түлхүүрээр

б) n үл хамаарах түлхүүрээр асдаг ба унтардаг чийдэнг зохиуулдаг цахилгаан хэлхээний төсөл зохио.

6. § 6-гийн 2 дугаар жишээний нөхцөлд цахилгаан шатны дээр явах хөдөлгөөнийг удирддаг хэлхээний төсөл зохио.

ХАВСРАЛТ

Булийн алгебрийн тодорхойлолт

Булийн алгебр гэж $\alpha, \beta, \gamma \dots$ элементүүдийн дурын олонлогийн маргаа хоёр α, β элементэд тэдгээрийн *нийлбэр* гэгдэх $\alpha + \beta$ ба *үржбэр* гэгдэх $\alpha \beta$ элементийг харгалзуулдаг нэмэх ба үржих үйлдэлтэй ямарваа α элементэд шинэ элемент α -г харгалзуулдаг „зураас“ үйлдэлтэй, мөн хоёр „онцгой“ 0 ба 1 элементтэй, дараахь дүрмүүд ойлөгддөг алгебрийг хэлнэ.

Нэмэх үйлдэлд

холбогдох дүрмүүд

$$1. \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

байр солих хуулиуд

$$2. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

бүлэгдэх хуулиуд

$$3. \alpha + \alpha = \alpha$$

идемпотент хуулиуд

Үржих үйлдэлд

холбогдох дүрмүүд

$$1a) \alpha\beta = \beta\alpha$$

$$2a) (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

$$3a) \alpha\alpha = \alpha$$

Нэмэх ба үржих үйлдлийг холбосон хуулиуд

$$4. (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

Хаалт нээх хуулиуд

$$4a) \alpha\beta + \gamma = (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)$$

0 ба 1 элементэд холбогдох дүрмүүд

$$5. \alpha + 0 = \alpha$$

$$5a) \alpha 1 = \alpha$$

$$6. \alpha + 1 = 1$$

$$6a) \alpha 0 = 0$$

„Зураас“ үйлдэлд холбогдох дүрмүүд

$$7. \overline{\alpha} = \alpha$$

$$8) \overline{0} = 1$$

$$8a) \overline{1} = 0$$

1 Математикч эрдэмтэн Булийн алгебр нь дурын хоёр α, β элементэд шинэ $\alpha + \beta$, ба $\alpha\beta$ -г элементийг харгалзуулдаг хоёр *бинар* үйлдэлтэй (нэмэх ба үржих), мөн дурын α элементэд шинэ 5 элемент харгалзуулдаг нэг *унар* үйлдэлтэй („зураас“) юм гэж ярьдаг.

"Зураас" үйлдлийг нэмэх ба үржих үйлдэлтэн холбосон дүрмүүд

$$1). \alpha + \beta = \alpha\beta \quad \begin{matrix} 9) \alpha\beta = \alpha + \beta \\ [De \text{ Моргани дүрмүүд}] \end{matrix}$$

Булийн алгебрийн тодорхойлолтод \sup харьцааг шаардахгүй бай болно. $\alpha \sup \beta$ аг уулагдахыг $\alpha + \beta = \alpha$ буюу $\alpha\beta = \beta$ нөхцөлийн адилаар ч тодорхойлж болох бөгөөд, эндээс \sup харьцааны бүх чанарыг гаргаж болно.

$$\alpha = > \alpha'; \alpha = > \beta \text{ ба } \beta = > \alpha \text{ бол } \alpha = \beta; \alpha = > \beta \text{ ба } \beta = > \alpha \text{ бол } \alpha = > \beta; \alpha = > i \text{ ба } 0 = > \alpha'; \alpha = > \alpha + \beta \text{ ба } \alpha\beta = > \alpha \text{ бол } \alpha = > \beta$$

Бүр цаашилбал Булийн алгебрийн тодорхойлолтод нэмэх буюу үржих үйлдлийн аль нэгийг шаардахгүй байж болно. Харин зөвхөн энэ хоёр үйлдлийн нэгийг ба "зураас" үйлдлийг шаардаж болно. Тухайлбал "нэмэх ба "зураас" хоёр үйлдэл байна гэвэл де Моргани дүрмийн тусламжтайгаар үржих үйлдлийг $\alpha\beta = \alpha + \beta$ гэж тодорхойлж болно. Гэтэл зөвхөн нэмэх ба үржих үйлдлийн байх нь Булийн алгебрийг тодорхойлж чадахгүй.

Булийн алгебрийн дээр дурдсан бидний тодорхойлолт нь дэнд, "хэмнэлгүйн" юм. Учир нь дурдсан чанаруудын нэлээд нь бүслээн мөрдөх билээ.

НОМ ЗОХИОЛ

[1]. Дж.Т. Кальбертсон, Математика и логика цифровых устройств, "Просвещение", 1965.

Дунд сургуулийн программаас хальсан мөртлөө, ушингваас ямарч урьдчилсан мэдлэг шаардахгүй боловч математикийн ном унших дадал, төсвөр хатуужлыг шаардах энэ номонд уг номын агуулгыг бүрдүүлэгч бүх асуудлууд нэлээд өргөн хүрээтэй хөндөгджээ. Бие дааж бодох нэлээд олон бодлоготой.

[2]. Э. Беркли, Символическая логика и разумные машины, ИЛ 1961

Энэ ном олон талаар урьдахтай төстэй гэвч математикийн машинтай холбогдсон асуудлыг өргөн хамруулах зорилгыг үүднээс Булийн алгебрт бага бичигдсэн.

[3]. Дж Кемени, Дж. Снелл. Дж Томсон, Введение в конечную математику.

Математикийн биш мэргэжлийн пэгдүгээр курсийн оюутнуудад зориулсан дэлгэрэнгүй сурах бичиг, манай товхимолд хөндөгдсөн асуудлуудыг нэлээд өргөн хүрээтэй шинжлэх асуудлаас эхэлнэ. Олон тооны бодлоготой.

[4]. Р. Курант и Г. Роббинс Что такое математика, "Просвещение" 1967

Юуны урьд дунд сургуулийн ахлах ангийн сурагчдад зориулсан энэ номонд Булийн алгебрийн талаар бичигдсэн.

[5]. А. Кофман Р. Фор, Займемся исследованием операций, "Мир" 1966

Бага бэлтгэлтэй ушингвад зориулсан энэ сонирхолтой номын нэг бүлэг нь Булийн алгебрт зориулагджээ.

[6]. Р. Столл, Множества, логика и аксиоматические теории "Просвещение" 1967

Урьдахь номуудаас нэлээд хүнд, харин туршлагатай уншигчид их сонирхолтой.